Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 571-576

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__571_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Dijon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Établir les équations de mouvement d'un fil flexible.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un losange articulé* ABCD *est posé sur un plan horizontal lisse. Un des sommets* A *est fixe.*

On demande d'étudier son mouvement lorsque les vitesses initiales de rotation des tiges AB *et* AC *sont* ω *et* ω', *et que la forme initiale est un carré.*

ω *étant double de* ω', *on calculera le maximum de l'angle des deux tiges* AB, AC, *pendant le mouvement.*

Les quatre tiges du losange sont homogènes et identiques. (Novembre 1910.)

Grenoble.

COMPOSITION. — *Une plaque carrée, homogène, infiniment mince, et pesante, est assujettie aux liaisons suivantes sans frottement : un de ses sommets* O *est fixe, un de ses côtés* OH *est horizontal. A l'instant initial la plaque est horizontale et immobile :*

1° *Mouvement de la plaque;*

2° *Au moment où la plaque est verticale, on immobilise brusquement le côté* OH. *Cette liaison étant persistante, trouver le mouvement ultérieur; calculer la perte de force vive.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une circonférence homogène pesante* C, *de rayon* R, *reste dans un plan vertical* P. *Elle roule sans glisser sur une circonférence* Γ *de rayon* ρ ($\rho < R$) *située dans ce plan et fixe par rapport à lui.* Γ *est intérieur à* C. *On néglige le frottement de roulement :*

1° *Le plan* P *étant fixe, trouver le mouvement de* C *et la réaction exercée par* Γ *sur* C;

2° *Comment faut-il choisir les données initiales pour que le mouvement considéré se produise si l'on suppose que* C *peut quitter* Γ *et que l'absence de glissement est due au frottement de glissement* (*appeler* f *le coefficient de frottement*);

3° *En supposant que* P *tourne uniformément autour de* Oz *verticale du centre* O *de* Γ, *trouver les positions d'équilibre relatif de* C.

NOTA. — *Prendre pour paramètre l'angle* θ *que fait avec* Oz *le rayon* OI *aboutissant au point de contact.*

(Juin 1911.)

COMPOSITION. — *Deux sommets opposés* P *et* R *d'une plaque carrée homogène* PQRS *glissent sans frottement sur une circonférence horizontale fixe dont le rayon est égal au côté de la plaque :*

Étudier le mouvement de la plaque; discuter.

Peut-il arriver que le mouvement soit une rotation uniforme, soit autour de l'axe du cercle, soit autour de la diagonale PR?

(*On admet que les liaisons sont réalisées de telle façon que la plaque puisse traverser le plan de la circonférence.*)

Paramètres : ψ *angle de* PR *et d'un rayon fixe* Ox, *de la circonférence;* θ *angle du plan de la plaque et du plan du cercle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parallélépipède homogène de masse* M *a pour arêtes* a, b, c :

1° *Trouver l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'un de ses sommets* O;

2° *Le parallélépipède étant animé d'une rotation uniforme de vitesse* ω *autour de l'une de ses arêtes* OO' *verticale, fixe et de longueur* C, *la fixité de l'arête étant réalisée par la fixité de ses extrémités* O, O', *déterminer les réactions qui s'exercent en* O *et* O';

3° *Déterminer, par rapport à* O, *le moment résultant des quantités de mouvement de ce solide;*

4° *Application numérique :*

$$a = 0^{m},5; \qquad b = 0^{m},4; \qquad c = 1^{m};$$

poids du solide 100^{kg}; *la vitesse de rotation* ω *correspond à* 30 *tours par minute.* (Novembre 1911.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Établir l'équation différentielle qui définit la trajectoire d'un point matériel de masse unité sous l'action d'une force centrale fonction de la position du mobile. L'intégrer dans le cas où la force estimée suivant le sens du rayon vecteur a pour valeur* $\frac{\mu r}{x^3}$, *r étant le rayon vecteur et x l'abscisse suivant le rayon vecteur initial* OM_0; μ *est un coefficient constant; initialement* $OM_0 = a$ *et le mobile est animé, normalement à* OM_0, *d'une vitesse égale à* $\sqrt{\dfrac{\mu}{2a}}$.

II. *Le potentiel cinétique d'un système dynamique conservatif holonome ne dépend pas explicitement de certaines des coordonnées de position de ce système. Montrer comment les intégrales premières correspondant à ces coordonnées peuvent être utilisées pour ramener l'étude du mouvement du système a celle du mouvement d'un autre système analogue dont le potentiel cinétique ne dépend que des autres coordonnées.*

Appliquer le procédé de réduction au mouvement d'un cerceau circulaire mobile autour d'un diamètre vertical et d'un petit anneau pesant susceptible de glisser sans frottement sur le cerceau.

Epreuve pratique. — *Par une pression du doigt sur un rond de serviette (dont la masse peut être regardée comme concentrée à la périphérie) reposant sur une table horizontale par sa surface cylindrique, on lance ce rond sur la table dans une direction perpendiculaire à son axe, en même temps qu'on lui imprime une vitesse de rotation autour de cet axe. Le rond se porte en avant pendant* 2^s, *puis rétrograde pour repasser à son point de départ après un nouvel intervalle de* $2^s,5$, *et il continue ensuite à rouler uniformément sur la table. Déterminer l'instant auquel ce mouvement uniforme a commencé.* (Juin 1911.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donné un système dynamique conservatif holonome à n degrés de liberté, montrer comment on peut utiliser l'intégrale de l'énergie pour ramener l'étude du mouvement d'un système à celle du mouvement d'un autre système dynamique à $(n-1)$ degrés de liberté.*

Appliquer ce mode de réduction à l'étude du mouvement à deux paramètres q_1, q_2, *dont le potentiel cinétique est*

$$\frac{a^2 q_1'^2}{q_1} + (q_1 + b) q_2'^2,$$

a et b étant des constantes; déterminer l'équation finie des trajectoires.

II. *Un tube circulaire parfaitement poli, de rayon r, mobile autour d'un diamètre placé verticalement, reçoit un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire $\omega = \sqrt{\frac{3g}{r}}$. Au point le plus bas est placé, en équilibre relatif, un point matériel qu'on vient à déranger légèrement de sa position. Étudier le mouvement ultérieur du point, et calculer notamment la longueur du pendule simple qui aurait la même durée d'oscillation.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer la force que produit l'attraction newtonienne d'un solide homogène de révolution, admettant pour méridienne la courbe d'équation polaire*

$$\rho = a\sqrt{\cos\theta},$$

par rapport à l'axe de révolution pris pour axe polaire, sur un point matériel situé au pôle.

2° *Même question pour la sphère définie par l'équation*

$$\rho = b\cos\theta.$$

3° *Le point matériel étant le même dans les deux cas, déterminer le rapport des densités des deux corps, de manière que les masses et les forces attractives des deux corps soient respectivement égales; calculer alors le rapport des volumes.* (Novembre 1911.)

Lyon.

Une plaque circulaire infiniment mince, homogène, pesante, est suspendue par son centre de gravité G *à l'extrémité* B *d'un fil de longueur l, flexible, inextensible et sans masse, dont l'autre extrémité* A *est fixe. Chaque molécule* M *de cette plaque est en outre attirée proportionnellement à sa masse et à sa distance* OM *vers un point fixe quelconque* O. *Étudier le mouvement du système.*

Pour le centre de gravité, après avoir établi complètement les équations différentielles dans l'hypothèse la plus générale, on pourra ne poursuivre l'étude du mouvement que dans l'hypothèse où le centre attractif O *est sur la verticale du point* A. *Pour le mouvement relatif, on cherchera par la méthode la plus simple à en donner une idée précise. On verra, en particulier, s'il n'existe pas une direction fixe telle que, dans le mouvement le plus général, la variation de l'angle de la plaque avec cette direction soit particulièrement simple, et l'on dira comment on peut déterminer cette direction à l'aide des conditions initiales, quelles que soient ces conditions.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La trajectoire d'un mobile est plane et a pour équation, en coordonnées rectangulaires,* $x^2y = a^3$. *L'accélération est constamment dirigée vers l'origine des coordonnées :*

1° *Trouver la loi du mouvement, connaissant, pour* $t = 0$, *les valeurs initiales* x_0 *et* x'_0 *de* x *et de* $\frac{dx}{dt}$;

2° *Quelle doit être la valeur de la constante des aires pour que la trajectoire soit superposable à l'hodographe;*

3° *Trouver l'équation de la podaire de la trajectoire relative à l'origine, et montrer que la trajectoire et sa podaire sont des courbes inverses. Calculer la puissance d'inversion, et expliquer le résultat;*

4° *Trouver le lieu des points du plan de la trajectoire tels que le moment du vecteur accélération par rapport à ces points soit indépendant du temps.*

(Juin 1911.)