CH. PLATRIER

Sur les variations de la déterminante et de la résolvante de Fredholm avec le champ d'intégration

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 183-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__183_1>

[H11c]

SUR LES VARIATIONS DE LA DÉTERMINANTE ET DE LA RÉSOLVANTE DE FREDHOLM AVEC LE CHAMP D'INTÉGRATION;

PAR M. CH. PLATRIER,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. Soient (S) un domaine du plan complexe contenant le segment réel (0 — 1), α une variable réelle comprise entre 0 et 1, $H(x, y)$ une fonction holomorphe pour x et y situés dans le domaine (S), M une limite supérieure de $|H(x, y)|$ pour ces valeurs de x et y.

Posons

$$H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} H(x_1, y_1) & \ldots & H(x_1, y_\varpi) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ H(x_\varpi, y_1) & \ldots & H(x_\varpi, y_\varpi) \end{vmatrix},$$

et considérons la déterminante de Fredholm :

$$(1)\quad D(\lambda, \alpha) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\omega!} \times \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_\varpi\, H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix},$$

son mineur d'ordre q :

$$(2)\quad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\lambda, \alpha\bigg)$$

$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\omega}{\omega!} \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_\varpi \, H\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}$$

et la résolvante :

$$(3)\qquad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda, \alpha\right)}{D(\lambda, \alpha)},$$

laquelle satisfait aux identités :

$$(4)\quad \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha) = H(x, y) + \lambda \int_0^\alpha H(x, s)\, \mathcal{H}(s, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

$$= H(x, y) + \lambda \int_0^\alpha H(s, y)\, \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\, ds.$$

Je me propose de donner des dérivées premières par rapport à α des fonctions (1), (2), (3) certaines expressions qui sont susceptibles d'être utilisées avec profit dans l'étude des nombres fondamentaux du noyau $H(x, y)$ lorsque l'on considère ces nombres comme des fonctions de α.

2. La dérivée par rapport à α du terme $T_\varpi(\alpha)$ de rang ϖ de la série $D(\lambda, \alpha)$ est

$$\frac{d\,T_\varpi(\alpha)}{d\alpha}$$

$$= \frac{(-\lambda)^\varpi}{(\omega-1)!} \int_0^\alpha ds_1 \int_0^\alpha ds_2 \ldots \int_0^\alpha ds_{\varpi-1} \, H\begin{pmatrix} \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \\ \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi-1} \end{pmatrix}.$$

On le voit facilement en calculant la partie principale de $[T_\varpi(\alpha + \Delta\alpha) - T_\varpi(\alpha)]$ et en tenant compte : d'un côté, de la non-importance du nom des variables d'intégration qui entrent dans les fonctions placées sous les signes $\int_0^\alpha$, et, de l'autre, de la symétrie en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ de la fonction $H\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}$.

Or, la série $D(\lambda, \alpha)$ est une série de fonctions holomorphes de α pour α situé dans le domaine (S); de plus, elle est absolument et uniformément convergente pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$; car, d'une part, son terme $T_\varpi(\alpha)$ est moindre que

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi}{\omega!} M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}},$$

d'après le théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant et, d'autre part,

$$\lim \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim \frac{|\lambda|}{\sqrt{\omega+1}} M \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\frac{\varpi}{2}} = 0.$$

La dérivée de la série $D(\lambda, \alpha)$ par rapport à α s'obtient donc en faisant la somme des dérivées de ses différents termes, et, par suite, si $0 \leqq \alpha \leqq 1$, on a

$$(5) \qquad \frac{\partial D(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{d\,T_\varpi(\alpha)}{d\alpha} = -\lambda\, D\left(\begin{matrix}\alpha \\ \alpha\end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right).$$

Nous pouvons écrire aussi l'égalité (5) sous la forme

$$(5\ bis) \qquad \frac{\partial \log D(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = -\lambda\, \mathcal{H}(\alpha, \alpha, \lambda, \alpha).$$

3. La formule

$$(6) \qquad \frac{\partial D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)}{\partial \alpha} = -\lambda\, D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q, \alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_q, \alpha \end{matrix} \middle| \lambda, \alpha\right)$$

s'établira d'une façon analogue à la formule (5).

4. Enfin, dérivons par rapport à α les deux membres de la première égalité (4), nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha}$$
$$= \lambda \,\mathrm{H}(x, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha) + \lambda \int_0^\alpha \mathrm{H}(x, s) \frac{\partial \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} ds.$$

La méthode de Fredholm pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de deuxième espèce permet de déduire de cette égalité la suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda \,\mathrm{H}(x, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha)$$
$$+ \lambda \int_0^\alpha \mathcal{H}(x, s, \lambda, \alpha)\, \mathrm{H}(s, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha)\, ds$$

soit, en vertu de la seconde égalité (4),

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}(x, y, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda\, \mathcal{H}(x, \alpha, \lambda, \alpha)\, \mathcal{H}(\alpha, y, \lambda, \alpha).$$

Les égalités (5), (5 *bis*), (6) et (7) sont les égalités que nous avions en vue.