NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 187-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__187_0>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Analyse. — *Intégrer l'équation*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

et construire les courbes intégrales.

GÉOMÉTRIE. — *Définition et détermination des développantes des courbes.*

Mécanique. — *Un point de masse* 1 *se déplace dans un champ de forces défini par les équations*

$$X = \frac{y}{z}, \qquad Y = \frac{x}{z}, \qquad Z = -\frac{xy}{z^2}.$$

Déterminer les lignes de force, les surfaces de niveau et le travail pour un déplacement donné. Étudier le mouvement du point lorsqu'il est assujetti à se déplacer sans frottement sur une droite donnée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un cercle de rayon* R *on considère un segment compris entre un arc de mesure* 2α *et la corde de cet arc. Évaluer le volume engendré par ce segment en tournant autour de sa corde. Application numérique au cas où* $R = 1$ *et* $\alpha = 28^\circ 32'$; *limite de l'erreur si* α *est connu à une minute près.*

(Octobre 1910.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la droite* D *dont l'équation,* *en fonction du paramètre* φ, *est*

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \cos^2\varphi.$$

1° *Former l'équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale générale est représentée par la draite* D.

2° *Exprimer à l'aide du paramètre* φ *les coordonnées du point* D *où la droite* D *touche son enveloppe* E *et construire cette enveloppe.*

3° *Calculer la longueur de la courbe* E *et l'aire du domaine plan qu'elle limite.*

4° *Exprimer, à l'aide du paramètre* φ, *les coordonnées du centre de courbure de la courbe* E *au point* P *et construire la développée de* E.

Comment calculerait-on la longueur d'un arc de cette développée ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un mobile est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale* v_0. *Il est soumis à son poids* p *et à une résistance* kv^2, *proportionnelle au carré de la vitesse* v *et dirigée en sens contraire :*

1° *Établir les équations du mouvement ascendant.*

2° *Déterminer la durée de ce mouvement et la hauteur atteinte.* (*Application numérique : masse du mobile* 1, $v_0 = 300$, $k = \frac{1}{60}$; *accélération de la pesanteur*, 980; *tous ces nombres sont donnés en unités* C. G. S.)

3° *Établir les équations du mouvement descendant.*

4° *Déterminer la vitesse du mobile au moment où il repasse par sa position initiale.* (*Application numérique : mêmes données que plus haut.*)

5° *Que deviennent les expressions trouvées aux* n^{os} 2 *et* 4, *quand on fait tendre* k *vers* 0 ? *Expliquer le résultat.*

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une manivelle* OA *de longueur* r *tourne dans un plan fixe* OABC *autour du point fixe* O *avec une vitesse angulaire* constante ω. *Elle entraîne une bielle* AB, *de longueur* a, *articulée à* OA *en* A *et articulée à une tige* BC *en* B. *Des guides fixes maintiennent cette tige sur une droite fixe* OBC *passant par* O. *On appellera* θ *l'angle* BOA, x *la longueur* OB *et l'on supposera* $a > r$:

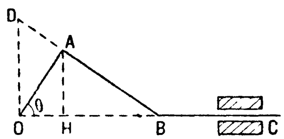
1° *Déterminer et construire la courbe fermée lieu du milieu de* AB.

2° *Calculer l'aire de cette courbe.*

3° *Exprimer en fonction de* θ *la vitesse* v *et l'accélération* γ *de* B.

4° *Représenter le rapport* $\dfrac{v}{r\omega}$ *par une série entière de puissances croissantes de la quantité* $\lambda = \dfrac{a}{r}$.

5° *En appelant* D *l'intersection de la droite* BA *avec la*



perpendiculaire à OB *en* O, *montrer que* v *reste proportionnel à* OD *dans le cours du mouvement.*

6° *Étudier la variation de la vitesse* v *pendant le mouvement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne la série*

$$\cos x + r\cos 2x + r^2\cos 3x + \ldots + r^n\cos(n+1)x + \ldots.$$

1° *Démontrer que cette série est convergente pour toute valeur de* x *lorsqu'on a* $|r| < 1$.

2° *Soit* $S_n(x)$ *la somme des* n *premiers termes de la série. Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près les racines (comprises entre* $-180°$ *et* $+180°$) *des équations*

$$S_1(x) = 0, \qquad S_2(x) = 0, \qquad S_3(x) = 0,$$

où l'on suppose $r = \frac{1}{10}$.

3° *Calculer à* $\frac{1}{10000}$ *près la somme de la série donnée lorsque*

$$r = \tfrac{1}{100}, \qquad x = 61°.$$

(Juin 1911.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Trouver l'intégrale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \lambda = -\frac{3a}{2}\sin 2t.$$

Montrer que si l'on détermine les constantes d'intégration de manière qu'on ait, pour $t = 0$,

$$\lambda = 0, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = a;$$

l'intégrale trouvée se réduit à $\lambda = a \sin t \cos t$.

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites définies par l'équation*

$$x \cos t + y \sin t - a \sin t \cos t = 0.$$

Exprimer, en fonction de t, *les coordonnées du point de contact et montrer que l'élimination du paramètre* t *donne, entre les coordonnées, l'équation*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Étudier la forme de la courbe, calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure, la longueur de l'arc, comptée à partir du point $t = 0$.

Trouver la développée. Montrer que si l'on fait tourner les axes de coordonnées autour de l'origine d'un angle de 45°, *les équations qui définissent la développée prennent une forme semblable à celles qui définissent l'enveloppe* (E) *dans le premier système de coordonnées.*

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}:$$

1° *En faisant le changement de variable*

$$1 - x = z^2;$$

2° *Au moyen de l'intégration par parties.*

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)}\right) y = x^2.$$

Vérifier qu'elle admet comme solution particulière un polynome du troisième degré.

(Juillet 1910.)