Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__191_0>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2180.

(1911, p. 96.)

Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. T. ONO (Kagoshimo).

Soit

$$\cos^2\omega = x,$$

il vient, en remarquant que les racines de $-2x^2+3x-1=0$ sont $\frac{1}{2}$ et 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(2x^2-x)(4x-3)}{(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x^2-x)\, d(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4x-1)(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(-2x^2+3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4x-3}{4}(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(-2x^2+3x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\arcsin(4x-3)\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\pi.$$

Autre solution par M. BOUVAIST.