NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur la conchoïde de Külp

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 193-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__193_0>

[M¹ 6b]

SUR LA CONCHOÏDE DE KÜLP;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. La conchoïde de Külp est définie de la manière suivante : on donne un cercle C de centre O, de rayon a et la tangente AT à l'extrémité A du diamètre AA′ de ce cercle; un rayon variable rencontre C en P et AT en N; les parallèles menées par P et N respectivement à AT et OA se coupent en un point M, dont le lieu est la conchoïde de Külp.

Cette courbe a été signalée par Külp dans l'*Archiv der Math. und Physik*, 1868.

Prenons comme axe des x le rayon OA, comme axe des y le diamètre perpendiculaire. Si l'on désigne par φ l'angle AOP, on a pour les coordonnées de M :

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\operatorname{tang}\varphi,$$

et l'équation de la conchoïde s'écrit

$$x^2y^2 = a^2(a^2 - x^2).$$

L'équation de la courbe est le résultat de l'élimination de z entre les deux équations

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad xy = az.$$

Par suite, *la conchoïde de Külp est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du cylindre de rayon a de révolution autour de l'axe y et d'un paraboloïde hyperbolique équilatère $xy = az$.*

L'un des systèmes de génératrices de cette dernière surface est formé par des droites qui s'appuient sur l'axe x et sont parallèles au plan yz, l'autre par des droites qui s'appuient sur l'axe y et sont parallèles au plan xz. Si donc on appelle α et β les projections de M sur Ox et Oy, la droite $\alpha\beta$ est la trace, dans le plan xy, du plan tangent au paraboloïde au point qui se projette en M sur xy.

Soient encore R le point où la tangente en P au cercle C rencontre l'axe Ox, RS la parallèle menée par R à Oy; cette dernière droite sera la trace du plan tangent au cylindre le long de la génératrice qui se projette suivant $M\alpha$. Il en résulte que le point d'intersection Q des droites $\alpha\beta$ et RS est un point de la tangente en M à la conchoïde. On est donc ainsi conduit à la construction suivante de la tangente à la courbe au point M.

On projette M *en* α *et* β *sur* Ox *et* Oy; *la tangente à* C *en* P *coupe* OA *en* R; *l'intersection de* $\alpha\beta$ *avec la parallèle menée par* R *à* Oy *est un point de la tangente en* M *à la courbe.*

Cette construction peut conduire à des tracés sortant des limites de la figure. Nous allons indiquer une seconde méthode pour la construction de la tangente, qui renfermera les tracés à l'intérieur du cercle C.

La droite symétrique de la tangente par rapport à $M\alpha$ a pour équation

$$y - a \tang\varphi = \frac{1}{\sin\varphi\cos^2\varphi}(x - a\cos\varphi),$$

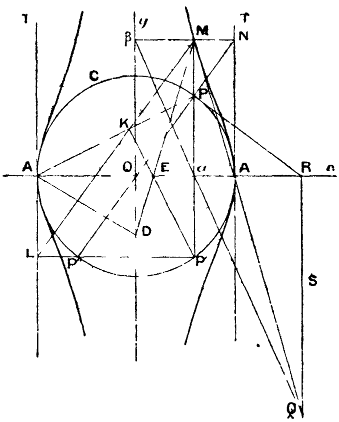
ou encore

$$y\sin\varphi\cos^2\varphi - x + a\cos^3\varphi = 0.$$

Elle coupe donc l'axe Oy en un point D tel que $OD = -a\cot\varphi$. On en déduit la construction suivante :

La perpendiculaire abaissée de A′ *sur le rayon* OP *rencontre* O*y en* D; *la droite* MD *coupe* OA *en* E;

Fig. 1.



le symétrique de E *par rapport à* α *est un point de la tangente en* M.

Il est à remarquer que le point E pourrait aussi s'obtenir en projetant d'abord α sur OP et en projetant ensuite le point obtenu sur AO.

2. Soient maintenant A′T′ la tangente en A′ au cercle C, P′ le symétrique de P par rapport à OA, L et K les projections de P′ sur A′T′ et sur A′P; nous allons montrer que LK passe par M. La droite P′L rencontre C au point P″ diamétralement opposé à P; l'égalité d'angles

$$PP''P' = PA'P' = KLP'$$

montre d'abord que LK est parallèle à P″N; on a ensuite

$$LP'' = MN;$$

LK passe donc par M. On arrive ainsi à cette nouvelle définition de la conchoïde de Külp :

On considère la tangente A′T′ *en un point fixe* A′ *d'un cercle* C *et une corde* PP′ *se déplaçant parallèlement à* A′T′; *la conchoïde de Külp est le lieu des points d'intersection de la corde* PP′ *avec la droite qui joint les projections de* P′ *sur* A′T′ *et sur* A′P.

La démonstration précédente montre encore que la portion de la droite MKL comprise entre AA′ et A′L est constante et égale à a. Il résulte de là que *la parallèle menée par un point de la courbe au rayon* OP, *qui a servi à le définir, enveloppe une astroïde régulière.*

3. *Généralisation.* — Remplaçons le cercle C par une ellipse d'axes $2a$, $2b$, AA′ étant le grand axe. Le point M décrit alors une courbe qui peut se déduire de la conchoïde de Külp par projection ; elle a pour équation

$$x^2y^2 = b^2(a^2 - x^2). \tag{1}$$

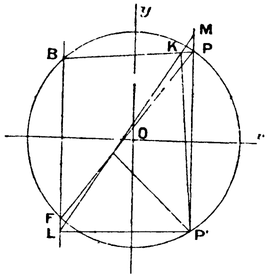
Elle est la projection sur le plan xy de la courbe d'intersection du cylindre de rayon a de révolution autour de Oy et du paraboloïde hyperbolique $xy = bz$. La première construction de la tangente (§ 1) lui est donc applicable.

On pourrait chercher à généraliser la conchoïde de Külp en remplaçant, dans la définition trouvée au paragraphe 2, la tangente A′T′ par une sécante parallèle BF, la droite LK devenant la droite de Simson de P′ par rapport au triangle BFP (*fig.* 2).

Il est intéressant d'observer que cette construction conduit encore aux quartiques (1).

La droite de Simson de P′ par rapport au triangle BFP est parallèle à PP″. Si donc on désigne par b la dis-

Fig. 2.



tance de O à BD, les coordonnées de L sont

$$(-b, \; -a \sin\varphi)$$

et la droite de Simson de P′ a pour équation

$$(2) \qquad y + a\sin\varphi = (x+b)\operatorname{tang}\varphi.$$

Celle de PP′ s'écrit

$$(3) \qquad x = a\cos\varphi.$$

L'équation (2) devient ainsi

$$(4) \qquad y = b\operatorname{tang}\varphi.$$

L'élimination de φ entre (3) et (4) donne pour le lieu cherché

$$x^2y^2 = b^2(a^2 - x^2);$$

c'est l'équation (1).

Ainsi les conchoïdes de Külp généralisées (1) admettent la définition suivante :

Étant données une corde fixe BF *d'un cercle* C *et une corde* PP′ *se déplaçant parallèlement à* BF, *la conchoïde de Külp généralisée est le lieu du point de rencontre de* PP′ *avec la droite de Simson de* P′ *par rapport au triangle* BFP.

4. Le segment de cette droite compris entre BF et OA est encore constant et égal à a. On en déduit ce théorème qui présente une certaine analogie avec le théorème de Steiner concernant l'enveloppe des droites de Simson d'un point variable du cercle circonscrit à un triangle :

Si deux sommets d'un triangle sont fixes et si le troisième se meut sur un cercle C *passant par ces points, l'enveloppe de la droite de Simson du point où la parallèle menée par le sommet variable au côté fixe rencontre le cercle est une hypocycloïde à quatre rebroussements.*