NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Sur la parabole de Chasles ou parabole des dix-huit droites

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 198-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__198_1>

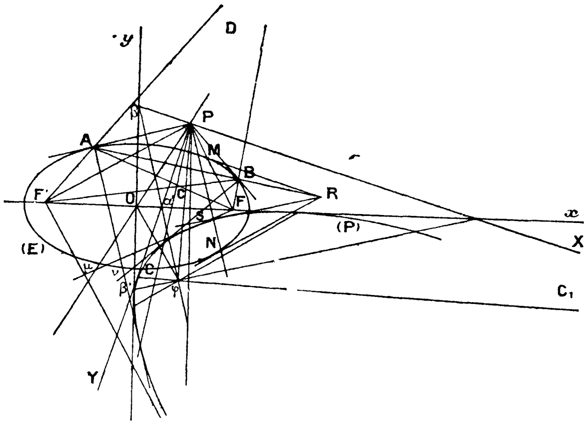
[L^1 19d]

SUR LA PARABOLE DE CHASLES OU PARABOLE DES DIX-HUIT DROITES;

PAR M. F. BALITRAND.

Pour résoudre le problème qui consiste à mener, par un point donné, des normales à une conique donnée, Chasles a proposé de remplacer la classique hyperbole d'Apollonius par une parabole (voir *Sections coniques*, p. 145). La définition de cette parabole est la suivante :

Étant donnés une ellipse (E) de centre O, d'axes Ox et Oy, de foyers F et F′, et un point P de son plan, menons par le point P une sécante, puis par les points M et N où elle rencontre l'ellipse les tangentes qui se coupent en R. Du point R



abaissons la perpendiculaire RS sur la sécante PMN; l'enveloppe de cette perpendiculaire est la parabole (P).

On peut déterminer *a priori* au moins dix-huit tangentes remarquables de cette courbe; d'où le nom de parabole de Chasles ou des dix-huit droites. On en trouve immédiatement quatorze, savoir :

Les quatre tangentes aux pieds des normales issues de P;

Les axes Ox et Oy;

Les normales aux points de contact, A et B, des tangentes PA, PB, issues de P;

La droite AB et la perpendiculaire élevée au milieu de AB ou médiatrice de AB;

Les perpendiculaires élevées en F et F′ aux rayons vecteurs PF et PF′;

Les bissectrices PX et PY de l'angle PAB (ou PFF′).

Les points de contact C et C_1 de la parabole (P), avec PX et PY, sont les centres de courbure des deux coniques homofocales à (E) qui se croisent en P.

Pour trouver d'autres tangentes remarquables joignons FA, FB; F'A, F'B. Nous obtenons ainsi un quadrilatère complet dont les quatre côtés touchent un cercle de centre P. Par suite, les points C et D sont sur une conique homofocale à l'ellipse (E). D'où il résulte comme tangentes nouvelles à la parabole (P) les quatre droites suivantes :

Les perpendiculaires en C et D aux droites PC et PD;

La diagonale CD et sa médiatrice.

L'examen de la figure formée par le point P et les points ABCDFF' donne le théorème suivant :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscriptible à un cercle, les perpendiculaires élevées par les sommets et les points de concours des côtés opposés aux rayons qui joignent ces points au centre du cercle inscrit sont six tangentes d'une parabole.

La connaissance d'un nombre aussi considérable de tangentes remarquables de la parabole (P) entraîne nécessairement beaucoup de théorèmes. Nous allons en énumérer quelques-uns :

La directrice de la parabole (P) est la droite PO et son foyer est facile à déterminer. A cet effet, désignons par α et β, α' et β', les points de rencontre de PX et PY avec Ox et Oy. Les couples de droites PX et PY, Ox et Oy, constituent deux coniques ayant un double contact avec la parabole (P). D'après un théorème connu, leurs cordes communes passent par le point de rencontre des deux cordes de contact et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces cordes.

Autrement dit, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ se coupent au foyer φ de la parabole (P), et comme elles sont rectangulaires (la droite $\alpha'\beta$ est une hauteur du triangle $\alpha\beta\beta'$), ce sont les bissectrices de l'angle formé par les cordes de contact.

Observons enfin que la parabole (P) ne change pas si l'on remplace l'ellipse (E) par une conique homofocale. On peut donc dire :

Si d'un point P l'on mène des normales à une famille de coniques homofocales, les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une parabole (P) qui touche les axes Ox et Oy et qui a pour directrice la droite PO.

Et aussi :

L'enveloppe des polaires d'un point fixe P par rapport à un système de coniques homofocales est une parabole tangente aux axes Ox et Oy et ayant pour directrice la droite PO.

Et encore :

Si d'un point fixe P on mène les tangentes aux coniques d'un système homofocal, les normales aux points de contact enveloppent une parabole tangente aux axes Ox et Oy et ayant pour directrice la droite PO.

La parabole de Chasles ne change pas davantage si l'on remplace l'ellipse (E) par une autre conique tangente en A et B aux droites PA et PB, puisque les normales en A et B, la droite AB et sa médiatrice, les bissectrices PX et PY de l'angle en P, sont six tangentes fixes de cette parabole. On peut donc encore la définir :

1° Comme l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés;

2° Comme l'enveloppe des tangentes aux pieds des normales issues du point P aux coniques de ce système;

3° Comme l'enveloppe des perpendiculaires menées aux rayons vecteurs qui joignent le point P aux foyers des coniques de ce système.

Le point de contact d'une tangente avec la parabole (P) est facile à construire; soit au moyen du théorème de Steiner : *Le point de rencontre des hauteurs de tout triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice;* soit au moyen du théorème de Brianchon. Nous ne nous y arrêterons pas ici.

On sait qu'il existe une conique, et une seule, homofocale à (E) et touchant la droite AB. Mais, puisque AB est une tangente de la parabole de Chasles, le point de contact est le pied d'une normale issue de P. Autrement dit, la normale au point de contact et les tangentes en A et B à l'ellipse (E) concourent en un point P. Par suite :

Étant données deux ellipses homofocales, si par un point de l'ellipse intérieure on lui mène une tangente qui coupe l'ellipse extérieure en A et B, la normale au point de contact et les tangentes à l'ellipse extérieure en A et B concourent en un point P.

Le point P est le pôle de AB par rapport à l'ellipse (E); donc l'on peut encore dire :

Le lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un système homofocal est une droite normale à la droite donnée au point où elle est touchée par la conique du système qui lui est tangente.

Sous cette forme le théorème est dû à Chasles.

Désignons par C et C_1 les centres de courbure des deux coniques homofocales à (E) qui se croisent en P. La parabole de Chasles touche en ces points les droites PX et PY, et le foyer φ de la parabole s'obtient en projetant le point P sur la droite CC_1. Menons maintenant les normales à l'ellipse (E) aux points A et B et soit ν leur point de rencontre. Les droites νA et νB sont des tangentes à la parabole (P). Pour obtenir les points de contact appliquons le théorème de Steiner. On voit ainsi qu'ils sont à l'intersection de νA et νB avec la perpendiculaire abaissée de P sur AB. La droite qui les joint, c'est-à-dire la polaire du point ν par rapport à la parabole de Chasles, passe par le point P. Autrement dit νP est conjuguée harmonique de $\nu\varphi$ par rapport à νA et νB, car le point ν est sur la droite $\nu\varphi CC_1$.

En effet, le cercle νABP, de diamètre νP, circonscrit à un triangle circonscrit à (P) passe par son foyer φ; donc le point ν se trouve sur CC_1.

Appelons μ le point de rencontre des perpendiculaires élevées en F et F' à PF et PF'. Le cercle $\mu FF'P$ passe par le foyer φ et le point μ, comme le point ν, se trouve sur la droite CC_1. Les points de contact de μF et $\mu F'$ avec (P) s'obtiennent par le théorème de Steiner et l'on voit qu'ils sont sur la perpendiculaire abaissée de P sur FF'; c'est-à-dire que la polaire de μ par rapport à (P) passe par P et par suite le faisceau $\mu FPF'\varphi$ est harmonique. Ce qui précède se résume dans les propositions suivantes :

Si d'un point fixe P l'on mène les tangentes aux coniques d'un système homofocal, puis les normales aux points de contact, le lieu du point de rencontre, ν, de ces normales est une droite. Cette droite passe par les centres de courbure C et C_1 des deux coniques du système qui se croisent en P. Les deux normales, la droite νP et la droite νCC_1 forment un faisceau harmonique.

Les perpendiculaires élevées en F et F' aux droites PF et PF' se coupent en un point μ situé sur la droite CC_1. Les deux perpendiculaires, la droite μP et la droite μCC_1 forment un faisceau harmonique.

Supposons maintenant que le point P vienne sur l'ellipse E; ce qui, au fond, ne particularise rien, puisqu'il y a toujours une ellipse homofocale à (E) passant en P. La parabole de Chasles est alors l'enveloppe des perpendiculaires abaissées des différents points de la tangente en P sur les polaires de ces points. Elle touche la normale à l'ellipse (E) en P au centre de courbure correspondant et la tangente au centre de courbure de l'hyperbole homofocale à (E) qui passe au point P.

D'après sa définition même, on voit que le point de contact de la parabole de Chasles avec la tangente est le pôle, par rapport à l'ellipse (E), de la normale en P, c'est-à-dire le centre de courbure de l'hyperbole homofocale. On a donc ce théorème (Salmon, *Sections coniques*, p. 642) :

Lorsque deux coniques homofocales se coupent au point P, *le centre de courbure de l'une au point* P *est le pôle, par rapport à l'autre, de la tangente à la première au point* P.

Les droites μF, $\mu F'$ rencontrent la tangente en P sur les directrices correspondantes et de plus, comme on l'a vu plus haut, le faisceau $\mu FF'PC_1$ est harmonique. Donc :

Le centre de courbure C_1 de l'hyperbole homofocale à (E) qui passe en P, est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points où la tangente en P coupe les directrices de l'ellipse (E).

On sait qu'une tangente variable d'une parabole découpe sur deux tangentes fixes de cette parabole des segments proportionnels. Ainsi les tangentes à la parabole de Chasles μF, $\mu F'$ et Oy, qui découpent sur l'axe Ox des segments égaux, découperont également des segments égaux sur une autre tangente quelconque de cette parabole ; par exemple sur la normale et sur la tangente en P à l'ellipse (E). Donc :

Étant donné un point P d'une ellipse (E), les perpendiculaires aux rayons vecteurs PF et PF′ découpent respectivement deux segments sur la normale et la tangente en P à l'ellipse (E). Le lieu du milieu de ces segments, lorsque le point P varie, est le petit axe de l'ellipse (E).

Revenons au cas où P est en dehors de l'ellipse (E). Les normales en A et B à cette ellipse et la médiatrice de AB sont trois tangentes de la parabole de Chasles. Ces trois tangentes déterminent sur une autre tangente quelconque de la parabole, par exemple sur les axes Ox et Oy, des segments égaux. Donc ;

Étant donnés deux points quelconques A et B d'une conique, si en ces points l'on mène les normales à la conique, ces normales déterminent un segment sur un axe de symétrie quelconque de la conique ; la droite menée par le milieu de la corde AB perpendiculairement à cette corde passe par le milieu de ces segments.

Joignons un point quelconque M de l'ellipse (E) aux points A et B et menons les normales à cette ellipse aux points M, A et B, ainsi que les médiatrices des cordes MA et MB. D'après le théorème précédent la médiatrice de MA passe par le milieu du segment déterminé sur Ox par les normales en M et en A ; de même la médiatrice de MB passe par le milieu du segment déterminé par les normales en M et en B. Les deux médiatrices déterminent donc, sur Ox, un segment égal à la moitié de celui découpé, sur le même axe, par les normales en A et B. Il est donc constant lorsque M varie sur (E). Ainsi :

Étant donnés sur une conique deux points fixe sA et B et un point M mobile sur cette conique; si aux points milieux des cordes MA et MB on élève des perpendiculaires à ces cordes, elles déterminent, sur un axe quelconque de la conique, un segment de longueur constante, quand M décrit la conique.

Ces deux derniers théorèmes sont dus à Laguerre.