GASTON COTTY

Sur quelques propriétés arithmétiques de l'espace réglé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 241-251
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__241_0>

[O7a]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE L'ESPACE RÉGLÉ;

Par M. Gaston COTTY.

(*Fin.*)

IV

22. On sait l'importance que présente la géométrie réglée par rapport à un complexe linéaire, c'est-à-dire celle où l'on distingue, parmi les divers ensembles réglés de l'espace, ceux qui jouissent de propriétés particulières par rapport à un complexe.

Les transformations de contact du genre de la transformation de Sophus Lie font correspondre les droites d'un complexe linéaire (K) aux points d'un espace ordinaire (E) à trois dimensions.

A un système de deux droites conjuguées par rapport à (K) correspond une pseudo-sphère de (E) en appelant *pseudo-sphères* les quadriques de (E) passant par une même conique. Aux substitutions (S) n'altérant pas le complexe (K) correspondent des substitutions de l'espace (E) conservant cette conique et, à un groupe de substitutions (S) n'altérant pas deux droites conjuguées par rapport à (K), correspond un groupe de substitutions semblables d'une forme quadratique, premier membre d'une équation homogène d'une pseudo-sphère de (E). On voit ainsi l'importance que présentent ces substitutions (S) dans un grand nombre de recherches relatives à la théorie des groupes et de certaines fonctions.

Nous avons donné ailleurs de ce principe une application à une classe remarquable de fonctions hyperabéliennes.

23. Les considérations qui ont fait l'objet des précédents Chapitres permettent d'étudier les substitutions (S) arithmétiques laissant inaltéré un complexe arithmétique (K) d'invariant quelconque n, autrement dit les substitutions automorphes du complexe (K).

Soit (K_n) le complexe $p_{03}+np_{12}=0$, on sait qu'il existe une substitution Σ de degré 1 changeant (K) en (K_n); la substitution inverse Σ^{-1} est également arithmétique et de degré 1 et elle change (K_n) en (K). Soit S l'une quelconque des substitutions automorphes de (K_n), les substitutions $\Sigma S \Sigma^{-1}$, c'est-à-dire les *transformées* des S par Σ laissent inaltéré le complexe (K) et sont les seules substitutions jouissant de cette propriété. Il nous suffira donc d'étudier les substitutions automorphes des complexes (K_n).

Les formules (R'_1) et (R'_2) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution (S) n'altère pas (K_n); elles s'écrivent :

$$(R'_1)\quad \begin{cases} (ab)_{03}+n(ab)_{12}=0,\\ (cd)_{03}+n(cd)_{12}=0,\\ (ac)_{03}+n(ac)_{12}=0,\\ (db)_{03}+n(db)_{12}=0,\\ (bc_{03})+n(bc)_{12}=n[(ad)_{03}+n(ad)_{12}]=n\lambda,\end{cases}$$

$$(R'_2)\quad \begin{cases} n(ad)_{01}+(bc)_{01}=0,\\ n(ad)_{23}+(bc)_{23}=0,\\ n(ad)_{02}+(bc)_{02}=0,\\ n(ad)_{31}+(bc)_{31}=0,\\ n(ad)_{03}+(bc)_{03}=n[n(ad)_{12}+(bc)_{12}]=n\lambda;\end{cases}$$

ces deux systèmes d'équations étant entièrement équivalents.

A chaque valeur entière du paramètre λ, il correspond des substitutions automorphes de (K_n) dont le degré (§ 12) est égal à λ^2. Ce degré est donc toujours carré parfait, ce qu'on pourrait établir autrement (§ 20) par application de résultats généraux. On en conclut que :

Si une substitution arithmétique (S) *laisse inaltéré un complexe arithmétique d'invariant non nul, son degré est carré parfait.*

La condition relative à l'invariant de ne pas être nul est essentielle.

Nous nous en tiendrons à ce résultat et nous n'étudierons pas ces substitutions automorphes des complexes (K_n); elles jouent un rôle capital dans la transformation des fonctions abéliennes et sont surtout intéressantes à ce point de vue.

24. Distinguons, parmi les quadriques, celles qui appartiennent à un complexe linéaire arithmétique quelconque ; elles sont équivalentes aux quadriques appartenant aux complexes (K_n), n recevant toutes les valeurs entières, y compris la valeur nulle qui correspond au complexe spécial (K_0). On peut se proposer de comparer les quadriques de (K_n) dans les substitutions n'altérant pas ce complexe. La question se transporte aisément dans la théorie des formes quadratiques, en considérant les formes des premiers membres des équations de ces quadriques. Entre les coefficients de ces formes à quatre variables existent des relations que conservent les substitutions (S) n'altérant pas (K_n). On voit ainsi comment la géométrie réglée vient présenter cette notion très importante de formes quadratiques particulières que l'on compare dans des substi-

tutions spéciales qui ne sont pas les substitutions linéaires les plus générales. On peut se poser, à ce point de vue, le problème de l'équivalence; cette étude est particulièrement intéressante à cause de l'importance qu'elle prend dans la théorie des fonctions et des formes abéliennes; nous l'avons développée ailleurs. Il nous suffit ici d'avoir donné la notion de cette nouvelle forme d'équivalence.

On est naturellement conduit à se demander quel est, en quelque sorte, le degré de généralité des quadriques à coefficients entiers, assujetties seulement à appartenir à un complexe linéaire arithmétique quelconque et non fixé, c'est-à-dire à cette condition que, parmi l'infinité de complexes linéaires auxquels appartient chacune de ces quadriques, il y en ait un au moins dont les coefficients soient rationnels. Nous nous en rendrons compte en établissant une propriété commune à toutes les formes quadratiques à quatre variables f premiers membres des équations $f=0$ de ces quadriques.

25. Si une quadrique (Q) appartient à un complexe *arithmétique* spécial ou, ce qui revient au même, possède parmi ses génératrices rectilignes une droite *arithmétique*, cette quadrique est équivalente à une quadrique contenant la droite (D_0) dont toutes les coordonnées (§ 21) p_{ik} sont nulles sauf p_{12} qui est égale à 1. Il est aisé de vérifier qu'une quadrique quelconque admettant cette droite comme génératrice rectiligne a son discriminant carré parfait. On en conclut que :

Si une quadrique admet comme génératrice rectiligne une droite arithmétique quelconque ou, ce qui revient au même, appartient à un complexe arith-

métique spécial quelconque, son discriminant est carré parfait.

Considérons maintenant une quadrique (Q) dont l'équation à coefficients entiers s'écrit :

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0;$$

cette quadrique contient deux demi-quadriques, chacune d'elles étant formée par les droites d'un système à trois termes, c'est-à-dire par les droites appartenant à une triple infinité de complexes linéaires (cela ne suppose en rien la rationalité des coefficients de f) et tout complexe de l'un des deux systèmes à trois termes est en involution avec tous les complexes de l'autre système. Chacun de ces systèmes comprend, si l'on veut, autant de complexes qu'il y a de points dans un plan. Si, parmi ces complexes en nombre ∞^3, il s'en trouve un à coefficients rationnels et spécial ou non spécial (les complexes spéciaux ont comme axes les génératrices rectilignes), le discriminant de la forme quadratique f est carré parfait. C'est ce que nous allons prouver dans les paragraphes suivants.

26. Démontrons cette proposition géométrique qui nous sera très utile :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique (Q) *appartienne à un complexe linéaire* (K) *est que toute droite conjuguée d'une génératrice rectiligne de* (Q) *par rapport à* (K) *soit également une génératrice de* (Q).

La condition est nécessaire. On sait, en effet, que si (Q) appartient à (K), elle contient une demi-quadrique formée de droites du complexe (K), lesquelles coïncident avec leurs conjuguées qui sont ainsi génératrices de (Q) et une autre demi-quadrique contenant des couples de droites conjuguées. Ceci est très connu.

La condition est suffisante. Pour le prouver, montrons qu'en chaque point M de (Q), l'une des deux génératrices rectilignes (Δ_1) et (Δ_2) qui y passent appartient à (K). Si (Δ_1) appartient à (K) le théorème est vrai. Supposons que (Δ_1) ne soit pas une droite de (K), par hypothèse, sa conjuguée (Δ'_1) est génératrice de (Q); elle ne rencontre pas (Δ_1), donc elle est du même système que (Δ_1), par conséquent (Δ_2) coupe (Δ_1) et (Δ'_1). Coupant deux droites conjuguées, c'est une droite du complexe (K).

Nous utiliserons ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique (Q) *appartienne à un complexe linéaire* (K) *est que la conjuguée par rapport à* (K) *de toute droite tangente à* (Q) *soit également tangente à* (Q).

La condition est nécessaire. Soit M un point de (Q) où se coupent les deux génératrices (G) et (g), la dernière faisant partie du complexe (K). Si (D) est tangente en M à (Q), (D), (G) et (g) passent par un même point et sont dans un même plan; il en est donc de même de leurs conjuguées (D'), (G') et (g). D'après le théorème précédent, (G') est génératrice de (Q); et (D') rencontrant en M' les deux génératrices (G') et (g), et étant dans leur plan, est tangente à (Q) en M'.

La condition est suffisante. Il suffit de remarquer qu'elle entraîne que la conjuguée de toute génératrice rectiligne de (Q) soit également tracée sur (Q) et la proposition précédente montre que la condition est suffisante. Directement: par hypothèse, la conjuguée (Δ') de toute droite (Δ) passant par M point de (Q) et située dans le plan (π) tangent à (Q) en M est tangente en (M′) à (Q). Ces conjuguées (Δ') sont dans le plan polaire (π') de M et passent par le pôle M′ de (π). La droite MM′ tangente à (Q) en M et en M′ est génératrice de (Q), car c'est une droite [1] du complexe (K). Donc, par tout point de (Q), il passe une génératrice de (Q) appartenant à (K).

27. Soit p_{ik} et p'_{ik} les coordonnées des deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire (K_1) d'équations $p_{03}+p_{12}=0$, p_{ik} et p'_{ik} sont égaux sauf pour les valeurs (03) et (12) des indices pour lesquelles on a

$$p'_{03}=-p_{12},\qquad p'_{12}=-p_{03}.$$

Pour écrire qu'une quadrique (Q) d'équation

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=\Sigma a_{ij}x_ix_j=0\quad (a_{ij}=a_{ji};\ i, j=0, 1, 2, 3)$$

appartient au complexe (K_1), il suffit d'écrire que si une droite de coordonnées p_{ik} est tangente à (Q), sa conjuguée par rapport à (K) de coordonnées p'_{ik} est également tangente à (Q). Or on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite de coordonnées pluckériennes p_{ik} soit tangente à (Q) s'exprime aisément, au moyen d'une relation entre les p_{ik}, par la considération de la *deuxième adjointe* de la forme f. Cette équation tangentielle de la quadrique (Q) en coordonnées de droites s'écrit :

$$\begin{aligned}\Psi(p_{ik})=&\Sigma p_{ik}^2(a_{ii}a_{kk}-a_{ik}^2)\\ &+2\Sigma(a_{hi}a_{lk}-a_{hk}a_{li})p_{hl}p_{ik}=0,\end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs des indices

[1] Si M′ et M étaient confondus, les droites passant par M et situées dans (π) appartiendraient toutes à (K), en particulier ce serait vrai pour les génératrices rectilignes passant par M.

telles que p_{ik} soit différent de p_{hl}. Si (Q) appartient au complexe (K_1) et si l'équation précédente $\Psi = 0$ est vérifiée par six nombres p_{ik}, elle l'est aussi pour les six nombres $p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, -p_{12}, -p_{03}$. En écrivant cela, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que (Q) appartienne à (K_1); ce sont les cinq relations suivantes entre les coefficients a_{ij} de la forme quadratique f :

$$(\rho_1) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{00}a_{33} - a_{03}^2, \\ & a_{00}a_{13} - a_{11}a_{02} - a_{01}(a_{03} - a_{12}) = 0, \\ & a_{33}a_{02} - a_{22}a_{13} - a_{23}(a_{03} - a_{12}) = 0, \\ & a_{11}a_{23} + a_{01}a_{33} - a_{13}(a_{03} + a_{12}) = 0, \\ & a_{00}a_{23} + a_{01}a_{22} - a_{02}(a_{03} + a_{12}) = 0. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de ces relations, on vérifie aisément que le discriminant de la forme f [ou de la quadrique (Q)] est le carré de la quantité

$$\delta = a_{00}a_{33} - a_{03}^2 + a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31}.$$

28. Un calcul analogue au précédent permet de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une quadrique (Q) appartienne au complexe [1] (K_n) d'équation $p_{03} + np_{12} = 0$. On doit écrire que si l'équation $\Psi = 0$ est satisfaite pour six nombres p_{ik}, elle l'est également pour $p_{01}, p_{23}, p_{02}, p_{31}, -np_{12}, -\frac{p_{03}}{n}$ et l'on trouve les relations suivantes :

$$(\rho_n) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = n^2(a_{00}a_{33} - a_{03}^2), \\ & a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11} + n(a_{00}a_{31} - a_{01}a_{03}) = 0, \\ & a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} - n(a_{02}a_{33} - a_{03}a_{23}) = 0, \\ & a_{01}a_{22} - a_{12}a_{02} - n(a_{00}a_{23} - a_{02}a_{03}) = 0, \\ & a_{31}a_{22} - a_{11}a_{23} + n(a_{03}a_{31} - a_{01}a_{33}) = 0, \end{aligned} \right.$$

[1] On suppose n positif ou négatif, mais non nul.

qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que (Q) appartienne au complexe (K_n). Elles se réduisent pour $n = 1$ aux précédentes (§ 27). Le discriminant de la forme quadratique f dont les coefficients satisfont aux relations (ρ_n) est le carré de la quantité

$$\delta = n(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31}.$$

29. Nous pouvons facilement déduire de toute l'étude précédente le théorème que nous avions en vue d'établir :

Si une quadrique à coefficients entiers appartient à un complexe linéaire arithmétique *spécial ou non, son discriminant est carré parfait.*

Si le complexe est spécial, c'est-à-dire si la quadrique admet parmi ses génératrices rectilignes une droite arithmétique, nous avons déjà établi cette proposition (§ 25).

S'il est non spécial, soit n son invariant, il existe une substitution arithmétique du premier degré le changeant en (K_n) et changeant la quadrique en une autre de même discriminant et appartenant à (K_n). Le discriminant de celle-ci étant nécessairement carré parfait, la proposition est établie.

On peut ne faire appel qu'à l'équivalence dans une substitution arithmétique de degré n de tout complexe d'invariant n au complexe (K_1) (§ 13). En effet, si la quadrique (Q) de discriminant Δ appartient à un complexe arithmétique (K) d'invariant n, la substitution (S) de degré n changeant (K) en (K_1) change (Q) en une quadrique (Q′) d'équation $f' = 0$, f' étant la transformée de la forme f premier membre de l'équation de (Q) par (S). Le discriminant $n^2\Delta$ de f' est carré parfait (§ 27). Δ devant être entier est nécessairement carré parfait.

30. Les formes quadratiques f, en désignant ainsi les premiers membres des équations des quadriques appartenant à un complexe arithmétique, sont donc des formes très particulières, puisque leur discriminant est carré parfait. Cependant, une quadrique appartient à des complexes linéaires en nombre égal à celui des points d'un plan, si nous assujettissons ses coefficients à être rationnels, il semble bien qu'il y ait beaucoup de chances pour que, parmi cette infinité de complexes, il y en ait un à coefficients rationnels. Il n'en est rien et les quadriques appartenant à un complexe arithmétique sont exceptionnelles; les formes f constituent une classe remarquable mais très spéciale de formes quadratiques à quatre indéterminées [1].

L'extension à la théorie des formes de l'équivalence, entendue au sens de cette Note, conduit à la réduction des formes f, mais si l'on ne veut pas sortir du domaine des quantités rationnelles (droites et complexes arithmétiques, etc.), on ne peut pas aborder l'étude des formes dont le discriminant n'est pas carré parfait.

31. On peut poursuivre l'étude arithmétique de l'espace réglé d'après les principes qui nous ont guidé dans l'étude du complexe arithmétique. Les congruences arithmétiques (système à deux termes dont les deux complexes de base sont arithmétiques) donnent des résultats simples et intéressants par leur liaison avec la théorie des formes binaires, en même temps leurs directrices introduisent des droites dont les six coordonnées sont des nombres algébriques d'un même corps.

---

(1) Cette proposition a été signalée incidemment aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (*Sur une classe de formes quadratiques liées à la transformation des fonctions abéliennes*, 5 février 1912) et est sans doute nouvelle.

Les systèmes à trois termes arithmétiques sont une nouvelle façon de concevoir les quadriques $f = 0$ et l'équivalence des formes f; nous ne pouvons y insister.

Enfin, ce que nous faisons dans le domaine des entiers ordinaires peut être repris dans un corps algébrique quelconque, mais il ne faut pas oublier que ces études sont surtout intéressantes par leurs applications et c'est pourquoi nous nous limitons à des propositions, parce qu'elles ont aujourd'hui leur place marquée dans une introduction à l'étude des transformations abéliennes, des fonctions abéliennes ordinaires et singulières et des formes abéliennes.