

R. BRICARD

**Sur un hexaèdre particulier**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 24-29

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_24\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__24_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[K' 14f]

SUR UN HEXAÈDRE PARTICULIER;

PAR M. R. BRICARD.

---

1. Il existe dans le plan deux espèces de quadrilatères ayant leurs côtés opposés égaux deux à deux : le *parallélogramme* et le *contre-parallélogramme* (figure formée par les côtés non parallèles et les diagonales d'un trapèze isoscèle).

Dans l'espace, il existe un hexaèdre, le *parallélépipède*, dont toutes les faces sont des parallélogrammes. On peut rechercher, par analogie, s'il existe un hexaèdre dont toutes les faces sont des contre-parallélogrammes. Nous allons voir que la réponse est affirmative. Donnons, dès maintenant, le nom de *contre-parallélépipède* à l'hexaèdre satisfaisant.

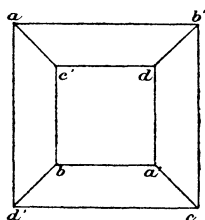
2. Soit  $abcd a'b'c'd'$  le schéma d'un contre-parallélépipède (*fig. 1*). Les lettres ont été tellement disposées que deux quelconques des sommets  $a, b, c, d$  soient les sommets opposés d'une même face de l'hexaèdre;  $a', b', c', d'$  sont les sommets de l'hexaèdre respectivement opposés aux premiers.

Par hypothèse, le quadrilatère  $a'cb'd$  par exemple est un contre-parallélogramme; ses diagonales  $a'b'$  et  $cd$  sont donc parallèles. De même,  $a'c'$  est parallèle à  $db$ , et  $a'd'$  est parallèle à  $bc$ . Autrement dit,  $a'b', a'c'$

et  $a'd'$  sont respectivement parallèles aux côtés du triangle  $bcd$ ; ces trois droites sont donc dans un même plan, d'ailleurs parallèle au plan du triangle. On verra, par un raisonnement semblable, que ce dernier plan contient aussi le point  $a$ .

Ainsi, les deux quadrangles  $abcd$  et  $a'b'c'd'$  appartiennent respectivement à deux plans parallèles  $P$  et  $P'$ .

Fig. 1.



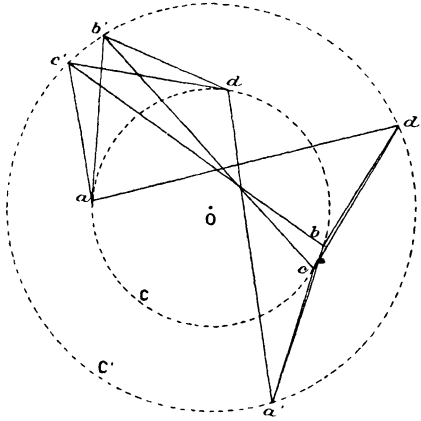
En outre, les côtés du premier quadrangle sont parallèles à ceux du second, deux côtés parallèles étant désignés par des lettres différentes (par exemple  $ab$  et  $c'd'$ ). On voit qu'à trois côtés concourants de l'un des quadrangles correspondent dans l'autre trois côtés formant un triangle. On reconnaît là les *quadrangles réciproques* de la statique graphique.

Pour aller plus loin, faisons une projection orthogonale de l'hexaèdre sur le plan  $P$ . Le contre-parallélogramme  $a'db'c$  restera visiblement tel en projection : il en résulte que les médiatrices des segments  $a'b'$  et  $cd$  (c'est-à-dire les perpendiculaires élevées aux milieux de ces segments) sont confondues. De même les médiatrices des segments  $a'c'$  et  $db$ , et celles des segments  $a'd'$  et  $bc$ . Mais les médiatrices des segments  $cd$ ,  $db$ ,  $bc$  concourent en un point  $O$ , centre du cercle circonscrit au triangle  $bcd$ . Il résulte immédiatement de là que les quatre points  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  appartiennent à un

cercle ayant le même centre  $O$ . On verra aussi que le point  $a$  appartient au premier cercle contenant les points  $b, c, d$ . En résumé les deux quadrangles  $abcd$  et  $a'b'c'd'$  sont, en projection sur le plan  $P$ , inscrits à deux cercles concentriques.

Il est facile d'achever. Soient  $\alpha, \beta, \dots, \gamma', \delta'$  les angles que font les rayons  $Oa, Ob, \dots, Oc', Od'$  avec un axe quelconque  $Ox$ . Pour exprimer que le quadrilatère  $d'c'b'd$  (*fig. 2*) est un contre-parallélogramme, il

Fig. 2.



suffit évidemment d'écrire que les deux angles  $\widehat{a'Ob'}$  et  $\widehat{cOd}$  ont les mêmes bissectrices, ce qui donne

$$\alpha' + \beta' = \gamma + \delta.$$

On aura de même

$$\alpha' + \gamma' = \beta + \delta,$$

$$\alpha' + \delta' = \beta + \gamma,$$

$$\beta' + \gamma' = \alpha + \delta,$$

$$\beta' + \delta' = \alpha + \gamma,$$

$$\gamma' + \delta' = \alpha + \beta.$$

On reconnaît tout de suite que ces six équations sont compatibles, *et cela établit définitivement l'existence du contre-parallélépipède*. En résolvant le système par rapport à  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ , il vient

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{-\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}, \\ \beta' &= \frac{\alpha - \beta + \gamma + \delta}{2}, \\ \gamma' &= \frac{\alpha + \beta - \gamma + \delta}{2}, \\ \delta' &= \frac{\alpha + \beta + \gamma - \delta}{2}.\end{aligned}$$

On peut donc se donner arbitrairement les points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sur le cercle  $C$ . Les positions des points  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  sur le cercle  $C'$  en résultent. Pratiquement, il vaut mieux se donner trois points sur le cercle  $C$  et un point sur le cercle  $C'$ , par exemple les points  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d'$ . On obtient les autres points en utilisant la réciprocité des deux quadrangles. On aboutit ainsi à la construction suivante :

*Tracer deux cercles concentriques  $C$  et  $C'$ ; marquer arbitrairement les points  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sur le premier et  $d'$  sur le second. Construire successivement les points  $c'$ ,  $a'$ ,  $d$  et  $b'$ , appartenant au cercle  $C'$  ou au cercle  $C$  suivant qu'ils sont désignés par des lettres accentuées ou non, en menant  $d'c'$ , parallèle à  $ba$ ;  $d'a'$ , parallèle à  $bc$ ;  $bd$ , parallèle à  $a'c'$ ;  $c'b'$ , parallèle à  $ad$ .*

*Les points  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et ceux qu'on obtient en donnant au quadrangle  $a'b'c'd'$  une translation quelconque perpendiculaire au plan de la figure sont les sommets d'un contre-parallélépipède.*

3. Le contre-parallélépipède jouit de propriétés qui résultent immédiatement de sa construction. Tout d'abord, il est évident qu'il est inscrit à une sphère. On voit tout aussi facilement que les douze arêtes du polyèdre sont réparties quatre par quatre sur trois hyperboloïdes de révolution autour de l'axe commun des cercles  $C$  et  $C'$ , savoir :

$H_1$ , contenant les arêtes  $ab'$ ,  $ba'$ ,  $cd'$ ,  $dc'$  ;

$H_2$ , contenant les arêtes  $ac'$ ,  $ca'$ ,  $bd'$ ,  $db'$  ;

$H_3$ , contenant les arêtes  $ad'$ ,  $da'$ ,  $bc'$ ,  $cb'$ .

Il existe d'autres hyperboloïdes attachés au contre-parallélépipède. Considérons en effet les deux systèmes de quatre droites

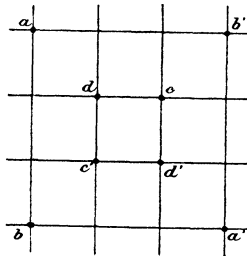
$$ab, a'b', cd', dc'$$

et

$$ab', ba', cd, c'd'$$

on se rend compte que chaque droite de l'un des sys-

Fig. 3.



tèmes rencontre chaque droite de l'autre système (à distance finie ou infinie). Ces huit droites sont donc à

un hyperboloïde  $H_1$  où elles se répartissent en deux groupes de génératrices de l'un et de l'autre système, comme le montre le schéma de la figure 3. La configuration des huit sommets forme donc ce que M. Fontené appelle un *octuple gauche complet*.

L'hyperboloïde  $H_1$  touche les deux plans  $P$  et  $P'$ , puisqu'il les coupe respectivement suivant les génératrices  $ab$  et  $cd$ ,  $a'b'$  et  $c'd'$ . Ces deux plans étant parallèles, le centre de l'hyperboloïde se trouve sur le plan parallèle et équidistant  $P''$ .

Il existe deux hyperboloïdes analogues :

$$H_2, \text{ contenant les droites } \begin{cases} ac, & a'c', & bd', & db'. \\ ac', & ca', & bd, & b'd', \end{cases}$$

et

$$H_3, \text{ contenant les droites } \begin{cases} ad, & a'd', & bc', & cb', \\ ad', & da', & bc, & b'c', \end{cases}$$

Ils ont aussi leur centre sur le plan  $P''$ .

Enfin une propriété intéressante du contre-parallépipède est relative à la possibilité de sa déformation avec conservation des longueurs des arêtes. En effet, le polyèdre le plus général de cette nature dépend de six paramètres de grandeur, à savoir les rayons des cercles  $C$  et  $C'$ , les longueurs des segments  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad'$ , et la valeur de la translation finale qui sert à le définir. D'autre part, ses douze arêtes sont égales quatre par quatre, et la connaissance de leurs longueurs se traduit par trois relations seulement entre les six paramètres. On voit donc *qu'il existe une triple infinité de contre-parallépipèdes ayant des arêtes de longueurs données*.

Il est curieux de constater que le contre-parallépipède se comporte, au point de la déformabilité, exactement comme le parallépipède.