A. BUHL

Sur les applications géométriques des intégrales curvilignes (seconde note)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 251-262

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__251_1>

[O5a] et [C2g]

SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES CURVILIGNES

(SECONDE NOTE);

PAR M. A. BUHL.

1. Considérons le volume appelé U_z dans mes précédents travaux, volume classique compris dans un cylindre de génératrices parallèles à Oz, limité inférieurement par le plan Oxy et supérieurement par une cloison S découpée dans une certaine surface

$$z = f(x, y).$$

Je me propose de montrer ici que, si la surface S est la surface intégrale de certaines équations aux dérivées partielles mises sous forme convenable, le volume U_z, qui est d'ordinaire une intégrale double, peut s'exprimer au moyen d'une intégrale de ligne attachée au contour Σ de la cloison S. Cela d'une manière pratique et intéressante qui constitue une application nouvelle de la formule de Stokes.

Je commence par rappeler que j'écris d'ordinaire la formule de Stokes sous la forme symbolique

$$\int_\Sigma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = \int\int_\mathrm{S} \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Ceci posé, soit une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Theta = \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} - \Phi(x, y, z) = 0,$$

où p et q sont, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction inconnue z. Quant à P, Q, R, ce sont, comme Φ, des fonctions quelconques de x, y, z.

Il est clair que si la cloison S est découpée sur une surface intégrale de $\Theta = 0$ on a identiquement

$$\int\int_\mathrm{S} \Theta\,dx\,dy = 0.$$

D'autre part, en vertu de la formule de Stokes, cette égalité peut s'écrire

$$(1) \qquad \int\int_\mathrm{S} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = \int_\Sigma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz.$$

Tel est le résultat très simple sur lequel est bâti tout ce qui suit. On voit qu'*il y a des intégrales doubles, attachées à des surfaces* S *intégrales de l'équa-*

tion $\Theta = 0$, *qui s'expriment immédiatement par une intégrale de ligne.*

En particulier, supposons que la fonction arbitraire Φ se réduise à z. Alors le premier membre de (1) représentera le volume U_z et l'on aura

$$U_z = \int_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

2. Continuons à prendre $\Phi = z$ et demandons-nous si toute équation

$$pF + qG = H, \tag{2}$$

où F, G, H sont des fonctions quelconques de x, y, z, peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} - z = 0. \tag{3}$$

Si l'on multiplie (2) par un facteur μ, l'identification donne

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= \mu F, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \mu G, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \mu H + z. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or, ces relations permettent de déterminer P, Q, R si μ satisfait préalablement à l'équation

$$\frac{\partial(\mu F)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu G)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H)}{\partial z} + 1 = 0. \tag{5}$$

Il y a une analogie de forme très manifeste entre cette équation et celle d'où dépend le multiplicateur de

Jacobi de (2). L'équation du multiplicateur ne diffère de (5) que par l'absence, dans le premier membre, du terme $+1$.

Imaginons donc que l'on tire μ de (5) [ce qui demande des calculs d'intégration qui sont déjà presque complètement effectués quand on intègre (2)] puis ensuite P, Q, R des équations (4), et finalement on aura l'expression de U_z donnée à la fin du paragraphe précédent. Il ne reste plus qu'à montrer, sur des exemples, que ces expressions de U_z sont intéressantes. [Cf. *Atti della Accademia di Torino*, t. XXXII, 1897, p. 597. (Lettre de M. E. Picard à M. V. Volterra.)]

3. *Premier exemple*. — Considérons les surfaces dont le plan tangent en $M(x, y, z)$ coupe Oz en un point T tel que $OT = mz$. Ce sont des cas particuliers des surfaces de M. Jamet pour lesquelles OT est une fonction quelconque de z; ici m est une constante.

On a l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = (1 - m)z \tag{6}$$

qui donne immédiatement pour intégrale générale

$$zy^{m-1} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{7}$$

f étant une fonction arbitraire. Donc ici nous avons

$$F = x, \qquad G = y, \qquad H = (1 - m)z$$

et l'équation (5) devient

$$x\frac{\partial\mu}{\partial x} + y\frac{\partial\mu}{\partial y} + (1 - m)z\frac{\partial\mu}{\partial z} + (3 - m)\mu + 1 = 0.$$

Pour tirer μ de celle-ci, il faut d'abord écrire les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{(1-m)z} = \frac{d\mu}{\mu(m-3)-1}.$$

Or, c'est ici le moment d'attribuer toute son importance à la remarque mise entre crochets au paragraphe précédent. Ces équations différentielles, au dernier membre près, sont celles qu'il a fallu écrire pour intégrer (6). Pour obtenir μ il n'y a donc qu'à poursuivre un calcul déjà très avancé, ce qui en vaut bien la peine si nous obtenons ainsi une remarquable formule de cubature pour des volumes attachés aux surfaces (7) intégrales de l'équation (6).

Dans le cas qui nous occupe on peut prendre simplement

$$\mu = \frac{1}{m-3}.$$

Certes, on pourrait introduire dans μ une fonction arbitraire, mais sans bénéfice pour la généralité, car cette fonction arbitraire ne figurerait finalement que dans des différentielles exactes figurant elles-mêmes dans des intégrales de ligne fermée, d'où des termes identiquement nuls.

On peut tirer maintenant des formules (4)

$$P = \frac{yz}{m-3}, \qquad Q = -\frac{xz}{m-3}, \qquad R = 0,$$

et l'on obtient finalement

$$U_z = \frac{1}{3-m} \int_{\Sigma} z(x\,dy - y\,dx). \tag{8}$$

Telle est l'expression du volume U_z attaché à une cloison faisant partie d'une surface du type (7).

4. Comme vérification partielle de la formule (8)

on peut facilement employer cette formule à l'évaluation de quelque volume simple dont l'expression serait connue à l'avance.

D'abord, dans les surfaces (7), pour $m = 0$, on peut comprendre les plans

$$z = x \operatorname{tang} \alpha,$$

où α est un angle donné. D'autre part, dans le plan Oxy, considérons le cercle

$$x - a = R \cos \varphi, \qquad y = R \sin \varphi$$

qui sert de base à un cylindre droit limité supérieurement par le plan précédent.

Il suffit de faire la figure pour y voir immédiatement que le volume compris dans ce cylindre est $\pi R^2 a \operatorname{tang} \alpha$. Et l'application de la formule (8) conduit au même résultat.

5. *Remarques sur un cas singulier.* — La formule (8), obtenue au n° 3, ne conserve point sa forme si $m = 3$. Dans ce cas, l'équation (7) montre qu'il s'agit des surfaces

$$(9) \qquad zy^2 = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'équation différentielle qui déterminait μ est à remplacer par

$$\frac{dz}{2z} = d\mu,$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{2} \log z.$$

Alors les seconds membres des équations (4) deviennent respectivement

$$\frac{x}{2} \log z, \qquad \frac{y}{2} \log z, \qquad z - z \log z,$$

et l'on a

$$P = \frac{y}{2}(z \log z - z), \qquad Q = -\frac{x}{2}(z \log z - z), \qquad R = 0;$$

d'où

$$U_z = \frac{1}{2}\int_\Sigma (z \log z - z)(y\,dx - x\,dy).$$

Mais

$$z(y\,dx - x\,dy) = f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{x}{y}\right)$$

et, à ce terme qui est une différentielle exacte, doit correspondre, dans l'intégrale précédente, un terme nul. Finalement

$$(10) \qquad U_z = \frac{1}{2}\int_\Sigma z \log z (y\,dx - x\,dy).$$

N'aurait-on pas pu, sans recommencer le raisonnement, déduire cette formule de (8) en faisant tendre m vers 3 ? Il est fort curieux de remarquer que la chose est possible et peut résulter d'une application de la règle de l'Hospital dans une circonstance où il ne serait peut-être pas toujours prudent de l'appliquer sans précautions.

Le second membre de (8), pour $m = 3$, est une expression de la forme $0:0$, car l'intégrale porte alors sur l'expression

$$f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}$$

qui est une différentielle exacte. Reprenons donc le second membre de (8) en l'écrivant

$$\frac{1}{3-m}\int_\Sigma y^{1-m} f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy - y\,dx).$$

Il y a bien là un rapport de deux expressions en m : remplaçant les deux termes du rapport par leurs dérivées prises par rapport à m, il vient

$$\int_{\Sigma} y^{1-m} \log y\, f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy - y\,dx),$$

ce qui est déterminé quand m tend vers 3. D'après (9)

$$\log y = \frac{1}{2}\log f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\log z,$$

et, en supprimant encore les différentielles exactes qui s'introduisent sous le signe somme, notre dernière intégrale redonne exactement la forme (10) de U_z.

6. *Deuxième exemple.* — Soient maintenant les surfaces telles que la normale et l'ordonnée d'un point $M(x, y, z)$ coupent le plan Oxy en des points N et P tels que le triangle ONP ait une aire constante. Si k^2 désigne le double de cette aire triangulaire, ces surfaces ont pour équation aux dérivées partielles

$$z(py - qx) = k^2.$$

Elles rentrent, comme cas particulier, dans d'autres surfaces que j'ai déjà étudiées dans mes Notes *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (*Nouvelles Annales*, 1908, 1909, 1910).

Ici, remarquons simplement qu'on a une généralisation des surfaces de révolution, ces dernières correspondant à $k = 0$.

On intègre très facilement l'équation précédente; l'intégrale générale, avec la fonction arbitraire f, est

$$z^2 = f(x^2 + y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}. \tag{11}$$

Nous avons ensuite

$$F = y, \qquad G = -x, \qquad H = \frac{k^2}{z}$$

et l'équation (5) est ici

$$y\frac{\partial\mu}{\partial x} - x\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{k^2}{z}\frac{\partial\mu}{\partial z} = \frac{k^2}{z^2}\mu - 1.$$

Il suffit d'en tirer

$$\mu = -\frac{z^2}{k^2},$$

et les formules (4) donnent ensuite

$$P = \frac{xz^3}{3k^2}, \qquad Q = \frac{yz^3}{3k^2}, \qquad R = 0.$$

Donc

$$U_z = \frac{1}{3k^2}\int_\Sigma z^3(x\,dx + y\,dy). \tag{12}$$

Telle est l'expression du volume U_z attaché à une cloison faisant partie d'une surface du type (11).

7. *Cas singulier.* — Si les surfaces (11) donnent manifestement les surfaces de révolution pour $k=0$ il semble, au premier abord, que la formule de cubature (12) ne puisse plus être appliquée à ce cas. La difficulté est complètement analogue à celle du paragraphe 5.

Récrivons le second membre de (12) sous la forme

$$\frac{1}{3k^2}\int_\Sigma \left[f(x^2+y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right]^{\frac{3}{2}}(x\,dx + y\,dy).$$

Pour $k=0$, l'expression sous le signe somme devient une différentielle exacte et, par suite, le tout prend la forme 0 : 0. Appliquons encore la règle de l'Hospital et nous aurons

$$-\int_\Sigma \left[f(x^2+y^2) - 2k^2 \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)(x\,dx + y\,dy),$$

ce qui, pour $k = 0$, donne

$$\text{(13)} \qquad U_z = -\int_\Sigma z\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)(x\,dx + y\,dy).$$

Or, c'est bien là une formule de cubature relative aux surfaces de révolution, car, en coordonnées semi-polaires, elle s'écrit

$$U_z = -\int_\Sigma z\,\theta\, r\, dr,$$

et est alors susceptible d'une vérification immédiate.

On voit que des formules de cubature jugées très simples, telles (13), peuvent être considérées comme cas limites de formules plus simples encore, telles (12).

8. *Remarque sur les fonctions de ligne.* — Il est facile de rattacher ce qui précède, et mieux encore les résultats de ma première Note, à la notion de *fonction de ligne* si brillamment développée et utilisée par M. Vito Volterra.

Ainsi, avec les volumes U_z j'ai considéré aussi U_x et U_y, volumes analogues limités par des cylindres de génératrices respectivement parallèles à Ox et Oy.

Quand ces trois volumes sont attachés à une même cloison S de contour Σ, on a

$$U_x - U_y = \int_\Sigma xy\,dz,$$

$$U_y - U_z = \int_\Sigma yz\,dx,$$

$$U_z - U_x = \int zx\,dy.$$

Évidemment, ces différences de volumes ne dépendent que de la ligne fermée Σ; *ce sont des fonctions de cette ligne*. Et elles sont bien exprimées, comme le fait M. Volterra, par des intégrales de ligne qui, dans le cas précédent, sont des cas très particuliers de celle qui figure dans la formule de Stokes.

On pourrait faire des remarques analogues pour toutes les différences de volumes considérées dans ma première Note et, plus généralement, dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1910).

Dans ce qui précède les choses sont un peu plus particularisées. Les volumes U_z considérés maintenant ne sont plus fonctions d'une ligne absolument quelconque, mais d'une ligne tracée sur une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles.

Dans les deux cas on peut imaginer que la ligne est représentée par des équations telles que

$$f(x, y) = 0, \qquad z = F(x, y).$$

La fonction F se particularise dans le second cas, mais en dépendant toujours d'une fonction arbitraire.

9. A propos de la Note précédente et particulièrement de son paragraphe 4, reprenons la demi-boucle sphérique de la courbe de Viviani. Nous avons calculé les volumes U_x, U_y, U_z correspondants, volumes qui, retranchés du huitième de sphère, donnent les excès

$$\frac{13}{45}R^3, \quad \frac{22}{45}R^3, \quad \frac{10}{45}R^3.$$

Or ces trois nouveaux volumes ont une somme exactement égale à R^3. Ce résultat, qu'il est intéressant de mentionner en passant, peut aller avec les théorèmes de rationalité de Viviani. Il a été remarqué par l'un de mes élèves de la Faculté des Sciences de Toulouse, M. A. Sorano.

10. *Généralisations.* — Les généralisations de ce qui précède sont aisées à apercevoir, mais elles sont moins élémentaires. Je me borne donc ici à les indiquer en quelques mots.

Supposons que, dans l'équation $\Theta = 0$ du paragraphe 1, on introduise p et q dans la fonction Φ. Admettons même, pour prendre un exemple particulièrement élégant, que

$$\Phi = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Nous pourrions former ainsi des équations aux dérivées partielles, sur les surfaces intégrales desquelles on pourrait prendre des cloisons dont l'aire gauche s'exprimerait immédiatement par une intégrale attachée au contour de cette cloison.

On pourrait également partir non de la formule de Stokes ordinaire, mais d'extensions de cette formule où figureraient les dérivées partielles p, q, r, s, t, ..., si bien qu'on pourrait chercher, pour des équations de formes très quelconques, des résultats analogues à ceux obtenus ici pour l'équation linéaire du premier ordre.