

E. GUILLEMAIN

**Sur la déformation infiniment petite des  
surfaces réglées à plan directeur**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 262-274

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_262\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__262_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[0'6k]

**SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES  
RÉGLÉES A PLAN DIRECTEUR;**

PAR M. E. GUILLEMAIN, à Clermont-Ferrand.

---

Je me propose de résumer ici quelques résultats  
obtenus en étudiant la déformation infiniment petite

des surfaces réglées à plan directeur, en renvoyant lorsque les démonstrations seront analogues, au Mémoire de M. Haag, traitant le cas des surfaces réglées quelconques, et paru aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

I. Je partirai des formules de Lelievre (voir Mémoire cité § 1) : dans le cas à étudier, je prendrai le plan des  $xy$  parallèles aux génératrices ( $G$ ) de la surface ( $S$ ). Un point quelconque  $M$  de la surface sera défini par l'angle polaire  $\alpha$  de la projection ( $g$ ) de ( $G$ ) sur  $xOy$  et par un deuxième paramètre  $\beta$ .

Par l'origine, menons une parallèle  $O\lambda$  à la normale au point  $M$  de ( $S$ );  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  seront les coordonnées d'un point  $P$  de  $O\lambda$ , et si l'on désigne par  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions de  $\alpha, s$ , on voit facilement qu'on a

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\lambda \sin \alpha, \\ \theta_2 &= \lambda \cos \alpha, \\ \theta_3 &= \mu.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  vérifient une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = K \theta.$$

Écrivons cette condition pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \sin \alpha \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - K \lambda \right) + \cos \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0, \\ \cos \alpha \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - K \lambda \right) - \sin \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Le système (2), considéré comme système d'équations

homogènes, admet comme solution

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - K \lambda = 0. \end{cases}$$

La première équation (3) nous donne  $\lambda = f(\alpha)$ , nous poserons  $\lambda = -R$ ; l'autre, comme  $\lambda$  n'est pas nul, montre que l'on a  $K = 0$ .

En écrivant que  $\theta_3$  vérifie (1), on obtient

$$\theta_3 = S + T,$$

S et T étant respectivement des fonctions de  $\alpha$  et de  $\beta$ , un raisonnement très simple montre que T ne peut ni être nul, ni être constant, sans quoi (S) serait développable, on peut donc, par un changement convenable de paramètres, prendre  $T = \beta$ , et l'on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \theta_1 = R \sin \alpha, \\ \theta_2 = -R \cos \alpha, \\ \theta_3 = S + \beta. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les formules de Lelievre, on obtient, pour la surface (S), les équations suivantes :

$$(S) \quad (5) \quad \begin{cases} x = R(S + \beta) \cos \alpha - 2 \int S' R \cos \alpha \, d\alpha, \\ y = R(S + \beta) \sin \alpha - 2 \int S' R \sin \alpha \, d\alpha, \\ z = \int R^2 \, d\alpha. \end{cases}$$

La surface ( $S_1$ ) qui lui correspondra avec orthogonalité des éléments s'obtiendra en prenant

$$\omega = A + B,$$

A et B étant respectivement des fonctions de  $\alpha$  et

de  $\beta$  :

$$(S_1) \quad (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -(A + B) R \sin \alpha + 2 \int A' R \sin \alpha \, dx, \\ y_1 = (A + B) R \cos \alpha - 2 \int A' R \cos \alpha \, dx, \\ z_1 = -(A + B) S \\ \quad + (A - B)\beta + 2 \int B \, d\beta + 2 \int SA' \, dx. \end{array} \right.$$

On peut d'ailleurs se débarrasser de la quadrature  $\int B \, d\beta$  en posant

$$B = B'_1.$$

Les formules (5) montrent que, si l'on change  $\beta$  en  $\beta + C$ ,  $C$  étant une constante, il suffit de modifier  $S$  pour avoir la même surface. De même, si l'on remplace  $\beta$  par  $C\beta$ , il suffit de multiplier les fonctions  $R$  et  $S$  par  $C$  pour avoir une surface homothétique de (S) dans le rapport  $C^2$ ; donc, on pourra, sans changer la nature de (S) dans les calculs ultérieurs, remplacer une expression de la forme  $C\beta + D$  par  $\beta$ .

Les formules (5) donnent immédiatement certaines propriétés de (S). Ainsi, si  $\varpi$  désigne le paramètre de distribution en un point, on aura, au signe près,

$$\varpi = \frac{dz}{da} = R^2.$$

*Donc, les surfaces telles que leur paramètre de distribution soit constant, seront données en prenant pour  $R$  une constante.*

Des équations (5) on déduit facilement le théorème suivant : *Le segment intercepté par deux lignes asymptotiques quelconques sur une génératrice variable est proportionnel à la racine carrée du paramètre de distribution.*

Les coordonnées d'un point de la ligne de striction s'obtiendront en remarquant qu'en ce point le plan tangent à la surface (S) est parallèle à Oz. Donc

$$\theta_3 = 0 \quad \text{ou} \quad S + \beta = 0.$$

Ce qui donnera comme équations de (L) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -2 \int S'Q \cos \alpha \, dx, \\ \eta = -2 \int S'K \sin \alpha \, dx, \\ \zeta = \int R^2 \, dx. \end{array} \right.$$

*Pour que la ligne de striction (L) soit en même temps ligne asymptotique, il faudra qu'on ait*

$$S = \text{const.}$$

Dans ce cas, les surfaces (S) correspondantes seront des conoïdes droits.

Si l'on pose

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \rho^2,$$

on sait qu'on a (*voir Mémoire cité § 6*)

$$\rho^2 = -RR_1 \quad \text{et} \quad \rho^2 = \pm \tau,$$

R et  $R_1$  désignant les rayons de courbure principaux au point M de (S) et  $\tau$  désignant le rayon de torsion de la ligne asymptotique passant par M. Les formules (5) permettent, en suivant une méthode analogue à celle adoptée par M. Haag dans son Mémoire, de vérifier toutes ces propriétés, et donnent en particulier

$$\rho^2 = -\tau.$$

Si l'on désigne par  $h$  la distance  $M_0M$  d'un point M de (G) au point central, on retrouve la formule donnée

dans le cas général

$$h^2 + \omega^2 = r\omega,$$

qui permet de construire le rayon de torsion en un point d'une ligne asymptotique  $\beta$ .

*Étude de  $S_1$ .* — Les propriétés de  $(S_1)$ , qui semblent intéressantes, sont relatives aux lignes  $(\alpha)$ . *A priori*, celles-ci doivent être planes et le plan de chacune d'elles est perpendiculaire à la génératrice correspondante de  $(S)$ . En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} 2 \int A'R \sin \alpha \, d\alpha &= u, & -2 \int A'R \cos \alpha \, d\alpha &= v, \\ 2 \int A'R \, d\alpha &= w, \end{aligned}$$

on obtient

$$(8) \quad (x_1 - u) \cos \alpha + (y_1 - v) \sin \alpha = 0.$$

Lorsque  $\alpha$  varie, le plan représenté par (8) enveloppe un cylindre parallèle à  $Oz$ , et dont l'équation ne dépend que d'une fonction arbitraire  $A$  lorsque la surface  $(S)$  est choisie; voyons si l'on peut déterminer  $A$  de façon à faire coïncider ce cylindre avec un cylindre arbitraire parallèle à  $Oz$ .

Il faut qu'on ait

$$(9) \quad u \cos \alpha + v \sin \alpha = p,$$

$p$  étant la fonction définissant le cylindre arbitraire.

En dérivant deux fois la relation (9), on tire

$$2RA' = -(p + p'') = \rho,$$

$\rho$  désignant le rayon de courbure de la base du cylindre donné; donc *se donner la développable, c'est se donner la fonction  $A'$  et par suite  $A$  à une constante près qu'on peut faire rentrer dans  $B$ .*

*Je dis que si une ligne particulière ( $\alpha$ ) est une droite, il en est de même pour toutes les autres et ( $S$ ) est développable.*

Pour cela, cherchons l'équation d'une ligne ( $\alpha$ ) dans son plan. On trouve

$$\begin{aligned} X &= R(A + B), \\ Z &= -(A + B)S + (A - B)\beta + 2 \int B d\beta + 2 \int SA' dx. \end{aligned}$$

Exprimant que le coefficient angulaire est constant

$$\frac{-B'(S + B) + A + B}{B'R} = K.$$

D'où, après intégration

$$B = \lambda\beta + \mu,$$

$\lambda$  et  $\mu$  constants.

D'après ce qu'on a vu, on peut prendre tout simplement  $B = \beta$ .

Les équations de ( $S_1$ ) deviennent alors

$$\begin{aligned} x_1 &= -(A + \beta)R \sin \alpha + u, \\ y_1 &= (A + \beta)R \cos \alpha + v, \\ z_1 &= -(A + \beta)S + A\beta + w. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit manifestement que ( $S_1$ ) est réglée.

En cherchant si les lignes ( $\alpha$ ) admettent une enveloppe, on trouve que ( $S_1$ ) est développable et que son arête de rebroussement a comme équations

$$\begin{aligned} x &= 2 \int SA' \sin \alpha dx, \\ y &= -2 \int SA' \cos \alpha dx, \\ z &= 2 \int SA' dx - A^2. \end{aligned}$$



*Surface* ( $\Sigma$ ). — Les coordonnées du point P de ( $\Sigma$ ), homologue du point M, sont

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} X = \xi + SR \cos \alpha - \frac{R \cos \alpha \left[ (A - B)\beta + 2 \int B d\beta + w \right] + (S + \beta)v}{A + B}, \\ Y = \eta + SR \sin \alpha - \frac{R \sin \alpha \left[ (A - B)\beta + 2 \int B d\beta + w \right] - (S + \beta)u}{A + B}, \\ Z = \zeta + \frac{v \sin \alpha + u \cos \alpha}{A + B} R; \end{array} \right.$$

si, dans les formules (10), on fait  $B = \beta$  les équations de ( $\Sigma$ ) deviennent

$$\begin{aligned} X &= \xi + SR \cos \alpha - \frac{(RA \cos \alpha + v)\beta + R \cos \alpha + Sv}{A + \beta}, \\ Y &= \eta + SR \sin \alpha - \frac{(u - RA \sin \alpha)\beta - uS - Rv \sin \alpha}{A + \beta}, \\ Z &= \zeta + \frac{R(v \sin \alpha + u \cos \alpha)}{A + \beta}. \end{aligned}$$

Si l'on coupe par un plan quelconque, on obtient une équation du premier degré en  $\beta$ ; donc les lignes  $\alpha = \text{const.}$  sont des droites, et ( $\xi$ ) est réglée.

Si dans les formules (10) on fait  $A = 0$ , les équations de ( $\Sigma$ ) sont

$$\begin{aligned} X &= \xi + R \cos \alpha \left[ S + \beta - \frac{2 \int B d\beta}{B} \right], \\ Y &= \eta + R \sin \alpha \left[ S + \beta - \frac{2 \int B d\beta}{B} \right], \\ Z &= \zeta. \end{aligned}$$

On voit que le point P de ( $\Sigma$ ) coïncide avec le point M' de (S) obtenu en prenant

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha, \\ \beta' &= \beta - \frac{2 \int B d\beta}{B}, \end{aligned}$$

par conséquent, pour  $A = 0$ ,  $(\Sigma)$  coïncide avec  $(S)$  et, par conséquent, est réglée,

Réciproquement, on démontre que si  $(\Sigma)$  est réglée, on se trouve dans un des deux cas examinés (*voir* HAAG, Mémoire § 8).

*Congruence G.* — Pour étudier les congruences  $(G)$  dans le cas particulier des surfaces réglées à plan directeur, nous emploierons la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire cité § 12), méthode basée sur ce que la droite  $MP$ , quand  $\beta$  varie seul, décrit une quadrique, et que, si l'on fait ensuite varier  $\alpha$ , cette quadrique touche son enveloppe, suivant les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, qui sont  $D, D_1, d, d_1$ , car la méthode, consistant à associer à une surface  $(S)$  une surface  $(S_1)$  (*voir* Mémoire § 10) donne lieu à des calculs très compliqués et dissymétriques, dans le cas actuel.

Partons de la surface  $(S)$  donnée par les équations (5), et cherchons l'équation d'une quadrique  $(Q)$ , se raccordant à  $(S)$  le long d'une génératrice  $(D)$ , et contenant deux tangentes asymptotiques  $d, d_1$ . Nous écrirons ensuite que  $(Q)$  touche son enveloppe suivant ces deux droites.

Les équations de  $D$  sont

$$(D) \quad (11) \quad \begin{cases} P \equiv R \sin \alpha (X - \xi) - R \cos \alpha (Y - \eta) = 0, \\ Q \equiv Z - \zeta = 0. \end{cases}$$

La tangente asymptotique  $(p)$ , au point  $M$  se trouve dans le plan tangent en  $M$  d'équation

$$(12) \quad P + (S + \beta)Q = 0.$$

D'autre part, un calcul simple montre que cette

droite est perpendiculaire à la direction définie par

$$R \cos \alpha + R' \sin \alpha, \quad R \sin \alpha - R' \cos \alpha, \quad S'.$$

Une deuxième équation de  $(d)$  sera donc

$$(R \cos \alpha + R' \sin \alpha)(X - x) \\ + (R \sin \alpha - R' \cos \alpha)(Y - y) + S'(Z - z) = 0$$

que nous écrirons

$$M + S'Q - R^2(S + \beta) = 0.$$

En posant

$$M = (X - \xi)(R \cos \alpha + R' \sin \alpha) - (Y - \eta)(R \sin \alpha - R' \cos \alpha).$$

Les équations de  $(d)$  seront

$$(d) \quad (13) \quad \begin{cases} P + mQ = 0 \\ M + S'Q - mR^2 = 0 \end{cases} \quad m = S + \beta,$$

celles de  $(d_1)$

$$(d_1) \quad (14) \quad \begin{cases} P + nQ = 0, \\ M + S'Q - nR^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation de la surface engendrée par les droites  $(d)$  est

$$(14') \quad \Pi \equiv S'A^2 + MQ + R^2P = 0;$$

c'est un parabolôide hyperbolique.

Pour former l'équation de la quadrique  $(Q)$ , remarquons qu'elle fait partie du faisceau déterminé par le parabolôide osculateur  $(\pi)$  et par le couple de plans

$$P + mQ = 0, \\ P + nQ = 0;$$

son équation sera

$$(15) \quad (S) \equiv S'Q^2 + MQ + R^2P + t(P + mQ)(P + nQ) = 0.$$

Il faut maintenant supposer  $t, m, n$  fonctions de  $\alpha$  et

chercher la caractéristique de (Q). Avant de dériver (15) par rapport à  $\alpha$ , remarquons qu'on a

$$(16) \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = M, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -R^2, \quad \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \delta P + \frac{2R'}{R} M + 2S'R^2.$$

En posant

$$\delta = -1 + \frac{R''}{R} - \frac{2R'^2}{R^2}.$$

On aura alors, après avoir tenu compte des relations (16),

$$\begin{aligned} T \equiv Q \left[ QS'' + \delta P + \frac{2R'}{R} M \right] + 2RR'P \\ + t'(P+mQ)(P+nQ) + t(P+nQ)[M+m'Q-mR^2] \\ + t(P+mQ)[M+n'Q-nR^2] = 0; \end{aligned}$$

suivant ensuite la méthode indiquée par M. Haag (Mémoire n° 12), on voit qu'on doit avoir

$$T \equiv KS + (P+mQ)[g(P+nQ) + h(S'Q + M - nR^2)]$$

ou

$$\begin{aligned} T \equiv K(S'P^2 + MQ + R^2P) \\ + (P+mQ)[l(P+nQ) + h(S'Q + M - nR^2)] \end{aligned}$$

en posant

$$l = g + kt.$$

Cette identité devant avoir lieu quels que soient P, Q, M.

En égalant les coefficients des termes semblables, nous obtenons les relations suivantes :

$$(17) \quad h = 2t, \quad t' = l, \quad k = \frac{2R'}{R} + (n-m)t.$$

$$(18) \quad S'' + t[nm' + mn' - S'(m+n)] = \frac{2R'}{R}.$$

$$(19) \quad \delta + t(m' + n' - 2S') = 0.$$

Les relations (18) et (19) sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que la quadrique (G) touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche. Les côtés D,  $d$ ,  $d_1$  auront respectivement comme équations (11), (13), (14); quant au côté ( $D_1$ ), on trouve, en suivant la marche employée dans le cas général

$$(D_1) \quad (20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2t^2P + \left[ t' + \frac{2R'}{R}t + t^2(m+n) \right] Q + 2tR^2 = 0, \\ \left[ t' - \frac{2R'}{R}t + t^2(m+n) \right] P \\ \quad \quad \quad + 2t(S' + mnt)Q + 2tM = 0. \end{array} \right.$$

Examinons quelques cas particuliers obtenus en assujettissant le quadrilatère ( $\Omega$ ) à remplir certaines conditions.

Exigeons, par exemple, qu'il ait deux côtés confondus, qui doivent être des côtés opposés. Si ce sont D et  $D_1$ , on obtient

$$t = 0.$$

Dans ce cas (Q) coïncide avec le parabolôide ( $\pi$ ), les relations (18), (19) ne s'appliquent plus; il faut reprendre les calculs directement en cherchant à décomposer l'intersection de ( $\pi$ ) avec la quadrique obtenue en déviant (14') par rapport à  $\alpha$ . On trouve que le quadrilatère se compose des côtés D,  $D_1$  confondus, d'un côté ( $d$ ) à l'infini dans le plan  $Q = 0$  et d'un quatrième côté à distance finie donné par

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \left( S'' - \frac{2R'S'}{R} \right) + \delta P = 0, \\ \delta(S'Q + M) + R(2R'S' - S'') = 0 \end{array} \right.$$

Imposons au parabolôide ( $\pi$ ) d'être équilatère, on devra avoir

$$S' = 0 \quad \text{ou} \quad S = C.$$

Les surfaces (S) seront donc des conoïdes droits, d'équations

$$\begin{aligned}x &= R(\beta + C) \sin \alpha, \\y &= R(\beta + C) \sin \alpha, \\z &= \int R^2 d\beta.\end{aligned}$$

Proposons-nous de déterminer les surfaces (S), pour lesquelles le parabolôide osculateur ( $\pi$ ), relatif à chaque génératrice a son sommet sur cette génératrice.

Il suffit d'écrire que, si M est le sommet cherché, le plan tangent en ce point est perpendiculaire à la direction de l'axe. Cette direction est définie par

$$\begin{aligned}Q &= 0, \\M &= 0.\end{aligned}$$

Si nous écrivons que ces deux plans sont perpendiculaires au plan tangent, on aura

$$\begin{cases} S + \beta = 0, \\ RR' = 0. \end{cases}$$

La première des équations (22) donne la valeur de  $\beta$  définissant le sommet, l'autre donne  $R^2 = C$ .

*Donc, les surfaces pour lesquelles le parabolôide osculateur le long d'une génératrice a son sommet sur cette génératrice sont les surfaces (S) pour lesquelles le paramètre de distribution est constant.*

En particulier, en appliquant à ces surfaces un théorème énoncé précédemment (p. 4), on voit que deux lignes asymptotiques fixes déterminent, sur une génératrice variable, des segments égaux.