NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur le mouvement à deux paramètres dans le plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 302-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__302_0>

[O'8]

SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES DANS LE PLAN;

PAR M. R. BRICARD.

1. La position d'un plan qui glisse sur un plan fixe dépend de trois paramètres. Si l'on établit entre eux une seule relation, on dit que le plan est animé d'un *mouvement au deuxième degré de liberté*, ou encore d'un *mouvement à deux paramètres*. Les points du plan mobile n'ont pas en général de trajectoire : chacun d'eux peut être amené à coïncider avec un point quelconque du plan fixe, ou tout au moins, si l'on tient compte des conditions de réalité du mouvement, avec un point quelconque situé à l'intérieur d'une certaine région. Un cas exceptionnel est celui où un point du plan mobile possède une trajectoire déterminée. Un tel point est nécessairement unique, car deux points du plan ne sauraient avoir de trajectoire sans que le degré de liberté du mouvement fût seulement le second.

Le mouvement au premier degré de liberté le plus général (en laissant de côté toutefois le cas où le mouvement se réduit à une translation) peut être obtenu, comme l'on sait, en liant le plan mobile à une courbe C qu'on fait rouler sur une courbe C_0. C est, dans le plan mobile, le lieu des points I qui deviennent successivement centres instantanés de rotation. C_0 est, dans le plan fixe, le lieu des points I_0 avec lesquels vient successivement coïncider le point I. On peut dire encore que tout mouvement à un paramètre permet d'établir entre deux courbes C et C_0, appartenant respectivement au plan mobile et au plan fixe, une correspondance ponctuelle, telle que deux arcs correspondants aient la même longueur.

On peut rechercher si le mouvement à deux paramètres donne lieu à une correspondance analogue (je parle de correspondance et non de roulement, car je n'ai pu voir par quelle extension de sens on parviendrait à définir un roulement à deux paramètres).

Pour établir le théorème, peut-être nouveau, auquel je suis parvenu, je m'appuierai sur une formule de rectification connue, mais qu'il ne sera pas inutile de démontrer ici même, pour donner au raisonnement toute la netteté désirable, surtout en ce qui concerne les signes.

2. Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires et D une droite orientée ou *demi-droite*. Désignons par φ l'angle $(\widehat{Ox, D})$, défini à $2k\pi$ près, et par p la distance de l'origine à D. Cette distance, comptée sur la demi-droite qui fait avec D l'angle $+\frac{\pi}{2}$, est susceptible de signe.

Nous dirons que D a pour coordonnées (φ, p). La demi-droite opposée D' a pour coordonnées $(\varphi+\pi, -p)$. Toutes deux sont portées par la droite ayant pour équation

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = p. \tag{1}$$

Supposons maintenant que D varie en dépendant d'un paramètre. On peut prendre φ comme variable indépendante (en laissant de côté le cas sans intérêt où φ serait constant); p est une certaine fonction de φ. D enveloppe une courbe Γ. Le point de contact M de D avec Γ est donné par l'équation (1), jointe à la suivante :

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = p',$$

où

$$p' = \frac{dp}{d\varphi}.$$

Ces équations, résolues en x et y, donnent

$$x = \quad p \sin\varphi + p' \cos\varphi,$$
$$y = -p \cos\varphi + p' \sin\varphi.$$

On en tire, en différentiant,

$$dx = (p + p'') \cos\varphi \, d\varphi,$$
$$dy = (p + p'') \sin\varphi \, d\varphi.$$

Par conséquent dx et dy sont les projections, sur Ox et sur Oy, d'un même segment $ds = (p + p'')\, d\varphi$, porté par la demi-droite D. ds est l'arc infiniment petit de la courbe Γ. Nous sommes conduits à le considérer comme positif ou comme négatif, suivant que, pour une variation infiniment petite de D, le point M se déplace ou non dans le sens de cette demi-droite.

Imaginons maintenant que p soit une fonction périodique de φ, la période étant égale à $2k\pi$ (k entier). La courbe Γ enveloppée par D est fermée [1], et sa longueur totale Λ est, en désignant par α un angle quelconque,

$$\Lambda = \int_\alpha^{\alpha + 2k\pi} (p + p'')\, d\varphi = \int_\alpha^{\alpha + 2k\pi} p \, d\varphi + [p'(\varphi)]_\alpha^{\alpha + 2k\pi}.$$

Mais on a, en tenant compte de l'hypothèse,

$$p'(\alpha + 2k\pi) = p'(\alpha).$$

[1] Pour éviter toute difficulté, je suppose que Γ n'a pas de point à l'infini.

La formule se réduit donc à

$$(2) \qquad \Lambda = \int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} p\, d\varphi.$$

Cette formule est attribuée à Cauchy par M. H. Lebesgue, dans son intéressant article intitulé : *Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton* (*Nouvelles Annales*, 4^e^ série, t. XII, 1912, p. 481). Dans son *Cours de Géométrie infinitésimale*, M. G. Demartres donne à la formule (2), ou plutôt à celle que l'on obtient en prenant l'intégrale entre des limites quelconques, le nom de *formule de Legendre* (p. 147).

3. Considérons maintenant une courbe fermée C, de longueur totale L, sur laquelle on fixe un sens de circulation. En chaque point de C menons la tangente MT, dont l'orientation est déterminée par le sens de circulation fixé. Menons ensuite une demi-droite MU, faisant avec MT un angle V, variant suivant une loi continue quelconque, mais telle que pour chaque position du point M, MU ait une direction bien déterminée. Quand le point M fait le tour de la courbe C, la demi-droite MU enveloppe une courbe fermée Γ dont nous allons chercher la longueur Λ.

Soient x et y les coordonnées du point M. Écrivons, avec les notations ordinaires,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

et posons aussi

$$\varphi + V = W.$$

La demi-droite MU est portée par la droite d'équation

$$\frac{X-x}{\cos W} = \frac{Y-y}{\sin W}.$$

Elle a pour coordonnées (W, $x \sin W - y \cos W$).

Cela posé, quand M fait le tour de la courbe C, et la demi-droite MU étant supposée reprendre sa position initiale, W varie dans un intervalle (α, $\alpha + 2k\pi$), k étant un nombre entier. Faisons $\alpha = 0$ pour simplifier l'écriture. La formule (2) fournit l'expression suivante de Λ :

$$\Lambda = \int_0^{2k\pi} (x \sin W - y \cos W)\, dW,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\Lambda = -[x \cos W + y \sin W]_0^{2k\pi} + \int \cos W\, dx + \sin W\, dy.$$

La partie intégrée reprend la même valeur aux limites. L'intégrale qui forme la seconde partie du second membre doit être considérée comme une intégrale curviligne prise le long de la courbe C. Nous en referons une intégrale ordinaire en remplaçant dx et dy par leurs valeurs $ds \cos\varphi$ et $ds \sin\varphi$, et en prenant s comme variable d'intégration. Les limites sont 0 et L. Il vient donc

$$\Lambda = \int_0^L (\cos W \cos\varphi + \sin W \sin\varphi)\, ds = \int_0^L \cos(W-\varphi)\, ds$$
$$= \int_0^L \cos V\, ds.$$

On aboutit ainsi à ce résultat remarquable : *la longueur* Λ *ne dépend que de la longueur totale de la courbe* C *et de la manière dont varie l'angle* V *en fonction de l'arc* M_0M *compté à partir d'une ori-*

gine fixe M_0. Si l'on déforme la courbe C en lui conservant la même longueur totale, chaque demi-droite MU étant entraînée de manière à faire avec la tangente correspondante un angle constant, la longueur de la courbe Γ reste invariable.

4. Abordons maintenant l'étude du mouvement à deux paramètres.

Rapportons le plan fixe P à des axes O_0x_0, O_0y_0, le plan mobile P à des axes Ox, Oy. Soient ξ, η les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes, φ l'angle $(\widehat{O_0x_0, Ox})$. Pour définir un mouvement à deux paramètres aussi général que possible, on peut prendre ξ et η comme variables indépendantes, φ étant une fonction de ξ et η [1].

On a, entre les coordonnées absolues (x_0, y_0) et les coordonnées relatives (x, y) d'un point entraîné dans le mouvement, les relations

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_0 &= \eta + x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}$$

A partir de la position qui correspond à un système de valeurs ξ, η, le plan P peut prendre une infinité de mouvements infiniment petits, tous compris dans le mouvement à deux paramètres. Chacun d'eux est caractérisé par une valeur du rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, et il lui correspond un centre instantané de rotation I. On obtient les coordonnées relatives du point I en écrivant que ses coordonnées absolues ont des différentielles nulles,

---

[1] Comme il existe au plus un point du plan P qui ait une trajectoire déterminée (n° 1), on peut toujours supposer que ce n'est pas le point O, ce qui permet de prendre ξ et η comme variables indépendantes.

ce qui donne

$$d\xi - (x \sin\varphi + y \cos\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\eta\right) = 0,$$

$$d\eta + (x \cos\varphi - y \sin\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,d\eta\right) = 0.$$

Si l'on fait varier le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, on reconnaît immédiatement que le point I décrit une droite, dont il est inutile, pour ce qui suit, d'écrire l'équation (1).

Ainsi :

Dans un mouvement à deux paramètres, le plan mobile peut prendre, à partir de l'une quelconque de ses positions, une infinité de mouvements infiniment petits. Le lieu des centres instantanés de rotation correspondants est une droite, que l'on peut appeler droite des centres (2).

5. Considérons maintenant les ∞^2 positions du plan P. Pour chacune d'elles il existe une droite des centres. L'ensemble des droites du plan P, dont chacune est appelée à devenir droite des centres, se confond en général avec l'ensemble des droites de ce plan (sauf un cas d'exception dont il sera parlé plus loin). De même, toutes les droites du plan P_0 sont en général appelées à devenir droites des centres, chacune pour une position particulière du plan P. On peut donc établir une

---

(1) On obtient une forme plus simple en introduisant les *coordonnées isotropes,* ce qui revient à employer la Géométrie vectorielle.

(2) Ce résultat est connu. Il correspond par exemple à la notion de *couronoïde tangent à un mouvement à deux paramètres,* introduite par M. R. de Saussure dans ses études de Géométrie cinématique [*voir* par exemple : *Exposé resumé de la Géométrie des feuillets*, Genève, 1910; ou bien : *Geometrio folietara* (en esperanto), Genève, 1910].

correspondance entre les droites du plan P_0 et celles du plan P, deux droites correspondantes D_0 et D étant, dans le plan P_0, celle qui sera droite des centres pour une certaine position du plan P, et dans ce dernier plan, celle qui viendra alors coïncider avec la droite D_0.

Nous allons reconnaître que cette correspondance jouit d'une propriété métrique remarquable.

Observons en effet que le mouvement à deux paramètres renferme une infinité de mouvements à un paramètre. On obtient l'un quelconque d'entre eux en assujettissant le point O à décrire une courbe arbitrairement donnée. Considérons un tel mouvement *fermé*, c'est-à-dire tel qu'il ramène le plan P à sa position initiale.

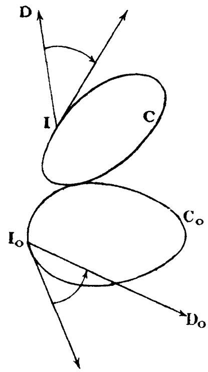
Dans ce mouvement, les droites D du plan P, qui seront successivement droites des centres enveloppent une courbe fermée Γ. Nous pouvons orienter ces droites, l'orientation de la droite qui correspond à la position initiale du plan P étant choisie arbitrairement, et celle des autres en résultant par continuité. Chaque droite D viendra successivement coïncider avec une certaine droite D_0 du plan P_0, que l'on peut orienter en conséquence de cette application. Les droites D_0 enveloppent une courbe fermée Γ_0. Je dis que *les deux courbes* Γ *et* Γ_0 *ont même longueur totale.*

En effet le mouvement considéré s'obtient en faisant rouler une certaine courbe fermée C sur une autre courbe fermée C_0. Ces deux courbes ont même longueur totale, puisque le mouvement est fermé.

Soient I_0 un point quelconque de la courbe C_0 et I le point correspondant de C (*fig.* 1), c'est-à-dire le point du plan P qui viendra se confondre avec I_0 quand ce dernier point sera centre instantané de rotation.

A ce moment les deux courbes C et C_0 seront tangentes. I et I_0 appartiennent respectivement à deux droites D et D_0 qui seront en coïncidence au moment

Fig. 1.



considéré. Il faut donc que les droites orientées D et D_0 fassent le même angle respectivement avec la tangente en I à C et la tangente en I_0 à C_0 (ces deux tangentes ayant elles-mêmes des orientations qui résultent des conditions du mouvement). On voit que le théorème du n° 3 est immédiatement applicable, et les courbes Γ et Γ_0 ont même longueur totale.

En résumé, *un mouvement à deux paramètres permet d'établir entre deux plans* P *et* P_0 *une correspondance de droite à droite. Aux droites qui, dans le plan* P, *enveloppent une courbe fermée* Γ, *correspondent, dans le plan* P_0, *des droites enveloppant une courbe fermée* Γ_0, *et les deux courbes* Γ *et* Γ_0 *ont même longueur totale* (1).

---

(1) Cette forme d'énoncé est un peu trop générale. On peut en effet considérer des mouvements à deux paramètres tels qu'une droite D étant donnée dans le plan P, il existe plusieurs positions

Il est assez remarquable que l'égalité de longueur établie n'existe qu'entre courbes fermées. Deux *arcs* correspondants des courbes Γ et Γ_0 ont en général des longueurs différentes.

Par exemple à des droites D passant par un point fixe correspondent des droites D_0 qui enveloppent une courbe de longueur totale nulle. Il faut entendre par là une courbe comprise d'arcs tels que la somme algébrique de leurs longueurs soit nulle. Ces arcs sont séparés par des points de rebroussement. Une telle courbe est la développée d'une courbe fermée.

6. Revenons sur un cas d'exception signalé plus haut. C'est celui où les droites du plan P, appelées à devenir droites des centres, forment un système simplement infini. Le théorème général cesse alors d'avoir un sens. Cherchons à définir les mouvements à deux paramètres pour lesquels se présente cette particularité.

Les droites du plan P, appelées à devenir droites des centres, ont alors des trajectoires orthogonales. Soit G l'une d'entre elles. Soient encore, pour une certaine position du plan P, D la droite des centres, M le point où elle rencontre la courbe G dans sa position actuelle (*fig.* 2). Le point M est ainsi défini pour

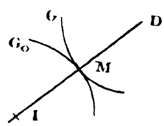
---

de ce plan pour chacune desquelles la droite D deviendra droite des centres. Supposons alors que la droite D, enveloppant une courbe fermée donnée arbitrairement dans le plan P, parte d'une certaine position et y revienne. Il peut fort bien arriver que le plan P, occupant à chaque instant la position pour laquelle la droite D est droite des centres, ne revienne pas à sa position initiale. Les droites D_0, correspondant aux droites D, n'envelopperaient pas une courbe fermée.

Pour tout mouvement à deux paramètres donné, il faudra préciser, par une discussion spéciale, la nature des courbes fermées auxquelles le théorème du texte est applicable.

chaque position du plan P, mais il est mobile par rapport à ce plan, où sa trajectoire est la courbe G. Donnons au plan P, à partir de sa position actuelle,

Fig. 2



un mouvement infiniment petit quelconque compris dans le mouvement à deux paramètres, et cherchons la vitesse absolue du point M.

Pour le mouvement infiniment petit considéré, le centre instantané de rotation est un point I de D. D'après la règle de composition des vitesses, la vitesse absolue de M est la somme géométrique de sa vitesse d'entraînement, résultant d'une rotation autour du point I, et de sa vitesse relative dans le plan P. Or, ces deux vitesses sont toutes les deux portées par la tangente en M à G. Le point M a donc, quel que soit le mouvement infiniment petit considéré, une vitesse absolue bien déterminée en direction.

Il en résulte que le point M, construit pour toutes les positions du plan P a, dans le plan P_0, une trajectoire bien déterminée G_0. En effet, la condition trouvée se traduit par une équation différentielle du premier ordre entre les coordonnées de ce point, et dont l'intégrale est complètement déterminée par une position particulière. On voit aussi que G_0 est tangente à G. On parvient donc, en résumé, au résultat suivant :

Pour définir, dans des conditions aussi générales que possible, un mouvement à deux paramètres singulier, tel que l'ensemble des droites du plan mo-

bile appelées à devenir droites des centres soit simplement infini, on liera la figure mobile à une courbe G *assujettie à toucher constamment une courbe fixe* G_0. *Les deux courbes* G *et* G_0 *peuvent d'ailleurs être quelconques.*

On remarquera que, dans le plan fixe, les droites appelées à devenir droites des centres forment aussi un système simplement infini, constitué par l'ensemble des normales à G_0.

7. Le théorème du n° 5 s'étend au mouvement à deux paramètres d'une sphère qui glisse sur une sphère fixe.

Tout d'abord, on reconnaît sans peine que, pour une position de la sphère mobile, il existe une infinité de centres instantanés de rotation, correspondant aux divers mouvements infiniment petits que peut prendre la sphère mobile à partir de sa position actuelle, et que ces centres sont répartis sur deux *grands cercles des centres* (diamétralement opposés). En général, tous les grands cercles de la sphère mobile sont appelés à devenir grands cercles des centres, et de même tous les grands cercles de la sphère fixe. Un mouvement à deux paramètres sur la sphère permet donc d'établir une correspondance de grand cercle à grand cercle. A une courbe fermée, considérée comme enveloppe de grands cercles, correspond une autre courbe fermée, enveloppe des grands cercles correspondants. Je dis que *ces deux courbes fermées ont en général même longueur.*

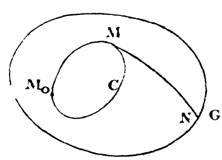
Comme la démonstration donnée au n° 5 s'appuie uniquement sur le théorème du n° 3, il suffit d'établir que ce dernier s'étend à la sphère.

Une marche analogue à celle que nous avons suivie dans le plan conduirait, sur la sphère, à beaucoup de calculs. Au contraire, en faisant appel à la considération des figures supplémentaires et en appliquant un théorème fondamental de Gauss, on parvient à une démonstration très simple.

Rappelons tout d'abord qu'on appelle *angle de contingence géodésique* en un point d'une courbe sphérique l'angle infiniment petit du grand cercle tangent à la courbe au point considéré et du grand cercle tangent au point infiniment voisin. Appelons *angle de contingence total* d'un arc de longueur finie la valeur de l'intégrale curviligne, prise le long de cet arc, et dont l'élément différentiel est l'angle de contingence géodésique ([1]).

Cela posé, soit C une courbe fermée (*fig*. 3) sur

Fig. 3.



laquelle on prend un point M_0 comme origine. En chaque point M de la courbe menons le grand cercle tangent et portons-y un arc MN dont la longueur soit une fonction donnée $f(\theta)$ de l'angle de contingence total θ de l'arc M_0M. Le point N décrit une courbe fermée, pour un choix convenable de la fonction f. Je dis que l'angle de contingence total de cette courbe G ne dépend que de la fonction f et de

([1]) Il va sans dire que l'angle de contingence total d'un arc est distinct de l'angle des arcs de grand cercle tangents à ses extrémités.

l'angle de contingence total Θ de la courbe C, et nullement de la forme de cette dernière.

On sait en effet, par le théorème fondamental de Gauss sur la courbure totale, que l'angle de contingence total d'une courbe fermée tracée sur la sphère ne dépend que de la mesure de l'aire sphérique limitée par cette courbe. Il faut donc établir que la courbe G limite une aire constante, si Θ est donné. Mais, si la courbe fermée C varie en conservant un angle de contingence total constant, son aire reste aussi constante. Tout revient donc à démontrer que la différence entre les aires des courbes G et C est constante. Or, l'élément différentiel de cette aire est celle d'un triangle sphérique isoscèle dont l'angle au sommet est égal à $d\theta$, et dont les côtés égaux ont une longueur commune égale à $MN = f(\theta)$. Cette aire infinitésimale a pour expression, en supposant le rayon de la sphère égal à l'unité,

$$[1 - \cos f(\theta)]\, d\theta.$$

On a donc, pour valeur de l'aire comprise entre C et G,

$$\int_0^{\Theta} [1 - \cos f(\theta)]\, d\theta,$$

ce qui établit la proposition, puisque l'expression trouvée ne dépend que de Θ et de la forme de la fonction f.

Cela posé, quel sera le théorème corrélatif? Aux points de la figure considérée vont correspondre, dans la figure supplémentaire, des grands cercles, et réciproquement. A une longueur d'arc de grand cercle correspond une grandeur d'angle, à un angle de contingence une longueur d'arc infiniment petit, à un angle de contingence total une longueur d'arc fini. La proposition établie se transforme donc en la suivante :

Soit C *une courbe sphérique de longueur totale* L. *Par chaque point* M *de* C *menons un arc de grand cercle faisant avec la tangente en* M_0 *un angle égal à une fonction donnée de la longueur de l'arc de courbe* M_0M, *mesuré à partir d'un point* M. *Cet arc de grand cercle enveloppe une courbe* G *qui est fermée, pour un choix convenable de la fonction considérée. La longueur totale de la courbe* G *ne dépend que de la forme de cette fonction et de la longueur* L.

C'est bien le théorème du n° 3 étendu à la sphère.