NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BALLIF

Cinématique d'aéroplane

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 30-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__30_0>

[R1a]

CINÉMATIQUE D'AÉROPLANE;

PAR M. LE LIEUTENANT BALLIF.

Soient deux aéroplanes A et B animés de vitesses constantes V_A et V_B qui se combattent par le canon. Admettons que, pour la facilité du tir, ils aient pris comme règle de manœuvre de maintenir constant l'angle de la vitesse de chacun d'eux, avec la droite qui les joint. Quelles courbes vont décrire ces deux mobiles?

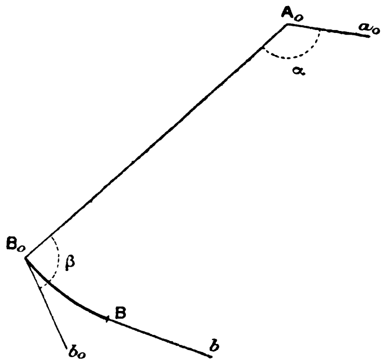
Il est facile de voir que, si l'on n'ajoute aucune condition particulière, l'un des mobiles pourra décrire une courbe arbitraire qui déterminera la trajectoire de l'autre. En effet, supposons les deux mobiles en $A_0 B_0$, avec des vitesses dirigées suivant $A_0 a_0$, $B_0 b_0$, et faisons décrire à B une courbe arbitraire tangente à $B_0 b_0$. Je dis que A peut s'arranger de façon à maintenir des valeurs constantes aux angles $a_0 A_0 B = \alpha$, $t_0 B_0 A = \beta$. En effet, soit B un point infiniment voisin de B_0 sur sa trajectoire, la position correspondante A de A_0 devra se trouver sur un cône de révolution d'angle au sommet β ayant pour axe Bb, tangente à la trajectoire en B. D'autre part, il devra se trouver sur un cône de révolution d'angle au sommet 2α, d'axe AB et de sommet A_0, et sur une sphère de rayon

$$\frac{V_A}{V_B} B_0 B = K.B_0 B.$$

Ces trois surfaces se coupent généralement, de sorte qu'on pourra déterminer A et continuer de proche en proche.

Pour déterminer dans cette hypothèse la trajectoire de A, il semble naturel d'employer la méthode du trièdre mobile qui fournira très simplement les équations du mouvement relatif de A par rapport à B.

Fig. 1.



Prenons pour axes Ox, Oy, Oz la tangente, la normale et la binormale à (B), soient x, y, z les coordonnées de A, et a, b, c les cosinus directeurs de sa vitesse.

Nous aurons la relation

$$y^2 + z^2 = x^2 \operatorname{tang}^2 \beta, \tag{1}$$

qui exprime que la droite AB fait un angle β avec la tangente à (B).

Projetons maintenant la vitesse relative de A sur les trois axes

$$\frac{dx}{dt} = -V_B + aV_A - qz,$$

$$\frac{dy}{dt} = bV_A,$$

$$\frac{dz}{dt} = cV_A + qx,$$

q est la rotation instantanée du trièdre, connue en fonction du temps.

Ces trois équations, résolues par rapport à a, b, c nous donnent

$$a = \left(\frac{dx}{dt} + V_B - qz\right)\frac{1}{V_A},$$

$$b = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{V_A},$$

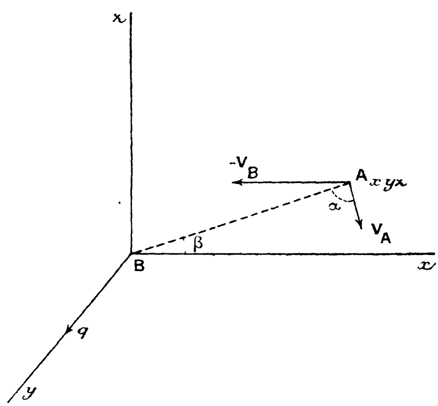
$$c = \left(\frac{dz}{dt} - qx\right)\frac{1}{V_A}.$$

Portons ces valeurs dans les relations

$$\frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Fig. 2.



Nous obtiendrons les deux équations

$$(2)\qquad \frac{x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} + z\dfrac{dz}{dt} + V_B x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = V_A \cos\alpha,$$

$$(3)\qquad \left(\frac{dx}{dt} + V_B + qz\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - qx\right)^2 = V_A^2,$$

qui, avec (1), permettraient, si on les intégrait, de déterminer x, y, z en fonction du temps. Inutile de faire remarquer que ces équations ne se laissent pas intégrer; elles comprennent, en effet, comme cas particulier, le problème général des courbes de poursuite dont on ne connaît pas la solution, même dans le plan. On peut cependant écrire de façon un peu plus simple :

$$(2') \qquad \frac{dr}{dt} + V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha, \qquad (r = AB);$$

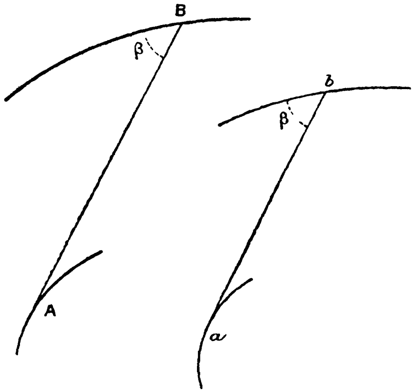
cette équation donne r en fonction linéaire de temps, et

$$(3') \qquad (V_B \sin^2\beta + V_A \cos\alpha \cos\beta + qz)^2 + \left(\frac{d\sqrt{r^2 \sin^2\beta - z^2}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + qr\cos\beta\right)^2 = V_A^2$$

montre que tout se ramène à intégrer une équation différentielle à une seule variable z, du premier ordre.

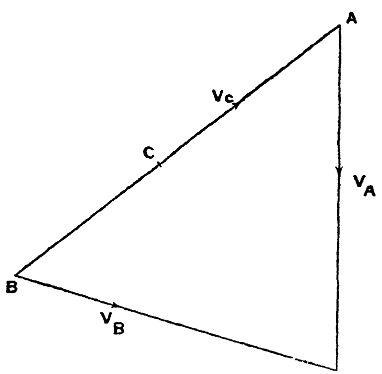
Examinons séparément le cas d'un intérêt tout particulier où $\alpha = 0$; dans ce cas, le mobile A se dirige constamment vers B. Dans ce cas, on ne peut plus se donner arbitrairement la courbe (B). En effet, la droite AB étant constamment tangente à (A) décrit une surface développable dont l'arête de rebroussement est (A). Développons cette surface sur un plan, les angles seront conservés et nous aurons, comme transformées de (A) et (B) deux courbes (a) et (b) telles que les tangentes à (a) fassent un angle constant avec (b) et que les arcs correspondants sur les deux courbes soient proportionnels. On sait que cette propriété est caractéristique de la spirale logarithmique. La courbe (A) est donc une spirale logarithmique gauchie, c'est-à-dire une courbe ayant même relation entre l'arc et la courbure que la spirale logarithmique et une torsion arbitraire, et la courbe (B) est une tra-

Fig. 3.



jectoire à angle constant β des génératrices de la développable ayant (A) pour arête de rebroussement. On

Fig. 4.



voit donc que ces courbes dépendent d'une seule fonction arbitraire, qui est la torsion de (A).

On se rend facilement compte que le résultat reste le même si l'on astreint les vitesses V_A et V_B à être dans un même plan. En effet, dans ce cas, les plans tangents à la surface réglée engendrée par AB étant confondus en A et B sont confondus tout le long de cette génératrice; donc, la surface engendrée par AB est développable. Le triangle formé par A, B et leurs vitesses se déplace en restant constamment semblable à lui-même et comme le rapport $\frac{V_B}{V_A}$ est constant, il existe un point C doué d'une vitesse constante dirigée suivant AB, et ce point C divise le segment AB dans un rapport constant. C'est donc ce point C qui décrira l'arête de rebroussement, qui sera la spirale logarithmique gauchie du problème précédent, et A et B décriront des trajectoires à angle constant des génératrices de la développable ayant (C) comme arête de rebroussement.

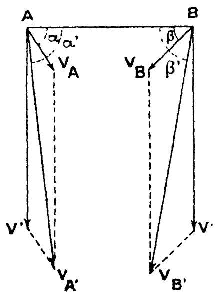
Je vais maintenant considérer un cas qui semble présenter un certain intérêt : c'est celui où les deux aéroplanes manœuvrent de façon à avoir des altitudes égales à chaque instant; c'est ce qui pourra se présenter, car un aéroplane ne consentira jamais, s'il peut l'empêcher, à se laisser dominer par son ennemi. Soient donc deux mobiles A et B situés dans un plan horizontal et manœuvrant (dans ce plan), de façon que les angles α, β soient constants. C'est le problème bien connu des deux cuirassés qui combattent de façon à se relever réciproquement sous un angle constant, de telle sorte que leurs pièces, une fois pointées, le restent pendant toute la durée du combat. La solution géométrique de ce problème est connue depuis longtemps et j'en ai donné une solution analytique dans la *Revue maritime* d'octobre 1907. On trouve facilement que A et B décrivent deux spirales logarithmiques égales et de même pôle. Donnons maintenant à toute la figure une translation perpendiculaire à son plan et de vitesse constante V'; les nouvelles vitesses

$$\overline{V_{A'}} = \overline{V_A} + \overline{V'} \quad \overline{V_{B'}} = \overline{V_B} + \overline{V'}$$

seront constantes et feront avec AB des angles constants $\alpha' \beta'$. Quant aux trajectoires des points A et B, ce seront deux hélices tracées sur des cylindres à base spirale logarithmique.

On peut remarquer que, dans ce mouvement, l'angle des plans ABV_A et ABV_B est constant, c'est-à-dire que

Fig. 5.

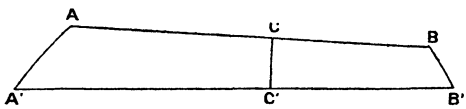


les deux aéroplanes restent dans une position relative complètement fixée au point de vue angulaire.

Ceci nous conduit à nous poser le problème général dont ce dernier est un cas particulier : trouver les trajectoires des deux aéroplanes lorsque leurs vitesses sont assujetties à faire avec la droite qui les joint des angles constants et que, de plus, l'angle dièdre des plans passant par leurs vitesses et la droite qui les joint est constant également.

Pour résoudre ce problème, il suffit de prendre les positions successives AB, $A'B'$, $A''B''$ de la droite AB dans la question précédente et, au lieu de nous astreindre à rendre AB, $A'B'$, $A''B''$ parallèles à un même plan, il faut au contraire faire tourner chaque quadrilatère gauche $A_n B_n A_{n+1} B_{n+1}$ d'un angle arbitraire autour de $A_n B_n$, ce qui introduit dans la solution une fonction arbitraire.

Mais cette transformation qui revient à faire tourner le trièdre fondamental et la courbe (hélice sur cylindre



à base spirale logarithmique) qui lui est liée, n'est plus simplement une modification de la torsion, car elle influe simultanément sur la courbure et la torsion.

Remarques I. — On peut se demander comment on a été conduit, dans le premier problème, à examiner le cas où l'un des mobiles se dirigeait constamment vers l'autre, et pourquoi ce cas particulier diffère si profondément du cas général. Au point de vue géométrique, c'est parce que le cône de révolution d'angle au sommet 2α qui est une surface dégénère en une droite qui est une ligne. On le voit également au point de vue analytique par ce fait que l'équation

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cos\alpha$$

devient

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+\beta^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=1$$

ou

$$(ax+by+cz)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Mais, d'après l'identité de Lagrange

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (\Sigma\, ax)^2 + \Sigma(ay - bx)^2,$$

d'où

$$(ax + by + cz)^2 = (ax + by + cz)^2 + \Sigma(ay - bx)^2,$$

qui n'est vérifiée que pour

$$ay - bx = bz - cy = cx - ay = 0.$$

de sorte que notre unique équation est remplacée par les deux autres

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$