NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Concours d'agrégation de 1912. Solution de la question de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 316-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__316_1>

CONCOURS D'AGREGATION DE 1912.
SOLUTION DE LA QUESTION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL;

PAR M. C. CLAPIER.

1. Une tangente MT au point M du cercle (γ) est déterminée par son plan de projection dont l'équation normale s'écrit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - r = 0,$$

et par le plan du cercle lui-même. Si l'on se donne une fonction uniforme $\omega(\alpha)$, les plans dépendant d'un paramètre α,

$$(1)\qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - r + \omega(z-h) = 0,$$

enveloppent une surface développable (S).

Cette surface dépend de la fonction arbitraire $\omega(\alpha)$ et les équations de ses caractéristiques sont

$$(2)\qquad \mathrm{M}\mu\left\{\begin{aligned} x\cos\alpha + \varphi\sin\alpha + \omega z &= r + \omega h,\\ -x\sin\alpha + \varphi\cos\alpha + \omega'_\alpha z &= \omega'_\alpha h.\end{aligned}\right.$$

Si l'on résout ces équations par rapport à x et y, on obtient les coordonnées d'un point de (S) à l'aide des deux variables α et z. La courbe (C) section de cette surface par le plan xOy sera définie par

$$(3) \qquad \mu \begin{cases} x = \rho \cos\alpha - \rho' \sin\alpha, & \rho = r + \omega h, \\ y = \rho \sin\alpha + \rho' \cos\alpha, & \rho' = \omega'_\alpha h. \end{cases}$$

Au point $\mu(x, y)$ correspond sur la tangente μt à cette courbe le point P de sa podaire, et l'on a

$$OP = \rho, \qquad \widehat{xOP} = \alpha, \qquad P\mu = \rho'.$$

2. Une courbe (C_1) définie par son équation en coordonnées cartésiennes aura une podaire dont l'équation coordonnées polaires ρ et α pourra s'écrire

$$F(\cos\alpha, \sin\alpha, \rho) = 0;$$

d'où l'on déduira un nombre limité de valeurs des fonctions $\rho_1(\alpha)$; à chacune d'elles correspondra une représentation par les formules (3). Si l'on se donnait (C_1) sous la forme $y = f(x)$, pour qu'elle pût coïncider avec une courbe (C), il faudrait que ρ satisfasse à l'équation différentielle

$$y'_x = -\cot\alpha = f'_x(\rho \cos\alpha - \rho' \sin\alpha),$$

dont l'intégration introduira une constante arbitraire qui provient de ce que toutes les courbes $y = f(x) + C$ sont des intégrales.

Si l'on fait subir une translation à la courbe (C_1), on aura

$$\rho = r + \omega h + k.$$

En ajoutant une constante arbitraire k à la fonction $\rho_1(\alpha)$ qui définit la représentation et caractérise une surface (S_1), on aura toutes les autres surfaces (S) auxquelles correspondent les autres solutions de l'équation différentielle déterminant ρ ou ω.

La représentation n'est possible que si à tous points de (C_1) correspond une seule tangente et une seule valeur de ρ; il faut donc que la courbe algébrique donnée n'ait aucun point multiple à tangentes distinctes.

Exemples : On pourra représenter l'hypocycloïde à trois rebroussements par les formules (3) en prenant $\rho = R\cos 3\alpha$, et l'hypocycloïde à quatre rebroussements, développée de l'ellipse à l'aide de $\rho = l \sin\alpha\cos\alpha$.

3. Pour appliquer la représentation précédente à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire, nous exprimerons les coordonnées x et y et les dérivées $y'_x, y''_x, y'''_x, \ldots$ à l'aide de ρ, α et les dérivées successives $\rho'_\alpha, \rho''_\alpha, \rho'''_\alpha, \ldots$.

Nous avons

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} : \frac{dx}{d\alpha}, \qquad y'' = \frac{dy'}{d\alpha} : \frac{dx'}{d\alpha}, \qquad \ldots$$

et nous déduisons, par les formules de transformation (3),

$$(4) \qquad y' = -\cot\alpha, \qquad y'' = \frac{-1}{\sin^3\alpha(\rho + \rho'')},$$

$$(5) \qquad y''' = -\frac{3R\cos\alpha + \rho' + \rho'''}{R^3\sin^4\alpha}, \qquad R = \rho + \rho'':$$

R est le rayon de courbure au point μ de (C).

La nouvelle équation différentielle pourra être plus facilement intégrable, et nous donnera

$$\rho = \varphi(\alpha, c_1, c_2, \ldots);$$

portant dans les expressions (3) nous aurons l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée à l'aide du paramètre α et des constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots$. La courbe intégrale ne devant pas avoir de points singuliers, il y aura des équations différentielles exceptionnelles qui à l'aspect de leurs coefficients ne pourront être intégrées par cette méthode.

Appliquons à l'équation du deuxième ordre

$$y''(xy'-y) = (1+y'^2)^2;$$

nous trouvons, à l'aide de (3), (4) et (5),

$$\rho'' + 2\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho + R = 0, \tag{6}$$
$$\varphi(\alpha) = A\cos\sqrt{2}\alpha + B\sin\sqrt{2}\alpha.$$

La courbe intégrale (C) est rectifiable; on a en effet

$$ds = -R\,d\alpha = \varphi(\alpha)\,d\alpha,$$
$$S = \frac{A}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\alpha - \frac{B}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}\alpha,$$

ou, avec de nouvelles constantes m et θ,

$$S = m\sin\sqrt{2}(\alpha - \theta). \tag{7}$$

Soit (C_1) une courbe particulière correspondant à $(\theta = 0,\ m = 1)$; il suffira de la faire autour de l'origine d'un angle quelconque θ et de prendre les homothétiques relatives à ce pôle O pour avoir toutes les autres intégrales.

D'après les relations (3) et (4), une équation en (x, y, y') qui contient linéairement x et y prendra la forme $\rho' = a(\alpha)p + b(\alpha)$ et son intégration se ramène aux quadratures.

Une équation du second ordre de la forme

$$m\frac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}} + n = R,$$

rayon de courbure, prendra la forme

$$\rho'' + (m+1)\rho = n$$

et sera intégrable par quadratures. Si $n = 0$, on aura une équation de la forme (6) et son intégrale générale pourra être obtenue par le déplacement (rotation et homothétie) d'une intégrale particulière.

4. Une surface (S) est une développable circonscrite au cercle fixe (γ) et à une courbe quelconque (C) du plan xOy. Prenons une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre c, et ayant pour équation, sous forme tangentielle,

$$\rho = r + \omega(\alpha, c)h. \tag{8}$$

A chacune d'elles correspond une surface (S), dont les équations (2) de la caractéristique s'écrivent

$$\frac{x - r\cos\alpha}{\omega\cos\alpha - \omega'\sin\alpha} = \frac{y - r\sin\alpha}{\omega\sin\alpha + \omega'\cos\alpha} = h - z = \frac{\mathrm{MN}}{\sqrt{1 + \omega^2 + \omega'^2}}. \tag{9}$$

Une courbe (σ) sera déterminée par une relation entre z et α, $z = h - f(\alpha, c)$; lorsque α et c varient, elle engendre une surface (Σ) représentée par les expressions

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\alpha + f(\alpha, c)\,[\omega(\alpha, c)\cos\alpha - \omega'_\alpha \sin\alpha],\\ y &= r\sin\alpha + f(\alpha, c)\,[\omega(\alpha, c)\sin\alpha + \omega'_\alpha \cos\alpha],\\ z &= h - f(\alpha, c), \end{aligned}\right. \tag{10}$$

qui donnent les coordonnées de l'un de ses points à l'aide des paramètres (α, c).

Si dans l'équation cartésienne d'une surface donnée (Σ_1), on remplace x, y et z par les valeurs (10), on obtiendra une équation qui déterminera f; cela revient à prendre pour (σ) la courbe d'intersection des droites caractéristiques (9) avec la surface (Σ_1).

Pour que la détermination de f soit unique, il faudra que ces droites $M\mu$ rencontrent (Σ_1) en un seul point N autre que le point M; la surface donnée devra donc passer par le cercle (γ). Dans le cas où $\omega^2 + \omega'^2 = 1$, la distance $MN = f\sqrt{2}$.

5. Si l'on excepte les surfaces réglées admettant le plan xOy comme plan directeur, les équations (10) peuvent représenter une surface quelconque.

Supposons que cette surface (Σ_1) soit orthogonale à la famille de surfaces (S) dépendant du paramètre $c = \beta$ et écrivons les équations (10) sous la forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= r - \omega(\alpha, \beta)\,\zeta(\alpha, \beta), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= \quad - \omega'(\alpha, \beta)\,\zeta(\alpha, \beta), \\ z &= h + \zeta(\alpha, \beta). \end{aligned} \right.$$

Les courbes (σ) sont définies par $\beta = \text{const.}$ et le plan tangent à la surface (S) correspondante a pour coefficients directeurs

$$\cos\alpha, \quad \sin\alpha, \quad \omega(\alpha, \beta).$$

Pour qu'il y ait orthogonalité, il faudra que la fonction inconnue $\zeta(\alpha, \beta)$ soit choisie de manière à satisfaire à la condition

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \omega \\ \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & p \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} & q \end{vmatrix} = 0.$$

$$p = \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}, \qquad q = \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}.$$

Les expressions (11) donnent x, y et z à l'aide des variables indépendantes α et β. Dérivons les deux premières successivement par rapport à ces variables; nous obtenons

$$(13)\quad \begin{cases} \sin\alpha \dfrac{\partial x}{\partial\beta} - \cos\alpha \dfrac{\partial y}{\partial\beta} = \omega'_\alpha q + \omega_2\zeta, \qquad \omega_2 = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \\ \cos\alpha \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} - \sin\alpha \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} = r - \omega' p - \zeta(\omega + \omega''), \end{cases}$$

$$(13')\quad \begin{cases} \cos\alpha \dfrac{\partial x}{\partial\beta} + \sin\alpha \dfrac{\partial y}{\partial\beta} = -\,\omega q - \omega_1\zeta, \qquad \omega_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}, \\ -\sin\alpha \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} - \cos\alpha \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} = -\,\omega p. \end{cases}$$

On déduit facilement la valeur du mineur

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} - \frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha} \\ &\qquad = \omega p(\omega' q + \omega_2\zeta) + (\omega q + \omega_1\zeta)[r - \omega' p - \zeta(\omega + \omega'')]. \end{aligned}$$

A l'aide des égalités (13) et (14) nous pouvons développer la condition (12) et obtenir l'équation aux dérivées partielles qui déterminera ζ

$$(\mathrm{E})\quad \begin{aligned} &p\zeta[\omega_2(1+\omega^2) - \omega_1\omega\omega'] + q(1+\omega^2)[r - \zeta(\omega - \omega'')] \\ &\qquad + \omega\omega_1\zeta[r - \zeta(\omega + \omega'')] = 0; \end{aligned}$$

elle est linéaire par rapport aux dérivées de z fonction des paramètres (α, β).

L'arête de rebroussement d'une surface (S) s'obtient en ajoutant aux équations (2) la suivante

$$-\,x\cos\alpha - y\sin\alpha + \omega''_\alpha z = \omega''_\alpha h,$$

ou encore

$$(z - h)(\omega + \omega'') = r.$$

Il en résulte que si l'on choisit la fonction arbitraire

$$\zeta = \frac{r}{\omega + \omega''},$$

les équations (11) représenteront la surface lieu des arêtes de rebroussement des développables (S).

Cette surface (Σ_2) sera une solution singulière de l'équation (E), si l'on a $\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = 0$, et par suite, si les surfaces (S) sont choisies de manière qu'on ait

$$\omega + \frac{d^2 \omega}{d\alpha} = r\,\varphi(\beta),$$

$$(15) \qquad \omega = A\cos\alpha + B\sin\alpha + r\,\varphi(\beta).$$

Nous pouvons prendre $\varphi(\beta) = \beta$ et dans ce cas l'équation (E) se réduit à

$$p\zeta\omega\omega' - (1-\beta)(1+\omega^2)q = \omega r \zeta,$$

et elle est facilement intégrable.

Une surface normale aux génératrices (2) est telle que la condition (12) et la suivante

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & \omega' \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & p \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & q \end{vmatrix} = 0$$

soient satisfaites.

D'après les expressions (13) et (13'), on devra avoir, par l'élimination du mineur (14),

$$p\zeta(\omega'\omega_2 + \omega\omega_1) + q\,\omega'[r - \zeta(\omega + \omega'')] = 0.$$

La surface (Σ_2) sera une solution particulière et obtiendra toutes les autres en prenant pour (σ) une développante de l'arête de rebroussement.