Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 324-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__324_0>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit* $x = f(u)$ *la fonction résultant de l'inversion de l'intégrale*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = u,$$

avec les conditions

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Trouver, par l'application du théorème d'Abel, l'expression de $f(u+v)$ *en fonction rationnelle de* $f(u)$, $f(v)$, $f'(u)$ *et* $f'(v)$.

II. 1° *En supposant comme l'expression d'une fonction d'une variable au moyen de l'intégrale double de Fourier, montrer comment on peut résoudre l'équation fonctionnelle en* $\varphi(y)$

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(y)\cos(xy)\,dy,$$

$f(x)$ *étant une fonction donnée.*

2° *Appliquer la solution trouvée au cas de*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre l'équation fonctionnelle*

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\,dy = \sin^2 x,$$

où λ *est une constante.*

Pour quelles valeurs de la constante λ *l'équation*

$$f(x)+\lambda\int_0^{2\pi}\cos(x-y)\,f(y)\,dy=0$$

a-t-elle une solution autre que zéro?

(Juillet 1911.)

Épreuve théorique. — I. 1° *On considère l'intégrale*

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\varphi(y)\,dy,$$

$\varphi(y)$ *étant une fonction réelle de la variable réelle* y. *Montrer que si cette intégrale a un sens pour une valeur* x_0, *réelle ou complexe de* x, *elle aura un sens pour toute valeur de* x *dont la partie réelle est supérieure à la partie réelle de* x_0.

2° *Quelle est la formule permettant de résoudre l'équation fonctionnelle* [*où* $\varphi(y)$ *est la fonction inconnue*]

$$f(x)=\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\varphi(y)\,dy,$$

quand cette équation est susceptible d'une solution?

3° *Appliquer la formule précédente à la résolution de l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{x-\alpha}=\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\varphi(y)\,dy.$$

α *étant une constante réelle, et la variable* x *restant supérieure à* α.

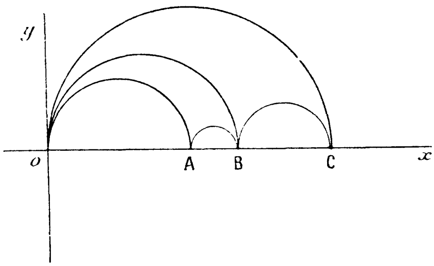
II. *On considère l'équation fonctionnelle*

$$(x-\alpha)f(x)+\lambda\int_a^{b}\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)\,f(y)\,dy=\psi(x),$$

α *étant compris entre* a *et* b *et* f *étant la fonction inconnue;* $\mathrm{X}(x)$ *et* $\mathrm{Y}(y)$ *sont respectivement des fonctions données de* x *et* y, *ainsi que* $\psi(x)$, *et sont régulières entre* a *et* b.

On demande de trouver pour quelle valeur de λ cette équation aura une solution $f(x)$ continue entre a et b.

Épreuve pratique. — *Soient dans le plan d'une variable complexe $x + iy = z$; tracer les trois demi-cercles de diamètres* OA, OB, OC *situés sur l'axe des quantités réelles.*



On prend l'image de la demi-circonférence $\widehat{OA}$ *par rapport au cercle* $\widehat{OB}$, *ce qui donne la demi-circonférence* $\widehat{OC}$. *Pareillement, on prend l'image de la demi-circonférence* $\widehat{AB}$ *par rapport au même cercle* $\widehat{OB}$, *ce qui donne la demi-circonférence* $\widehat{BC}$.

On demande de calculer les deux substitutions fondamentales du groupe fuchsien ainsi engendré et ayant pour polygone fondamental le quadrilatère curviligne OABCD.

On posera

$$OA = a, \qquad OB = b \qquad (a < b).$$

(Octobre 1911.)