

E. LANDAU

Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre (supplément)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13 (1913), p. 353-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__353_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[12e]

**SUR LES CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ D'UN PRODUIT
DE FACTORIELLES PAR UN AUTRE (SUPPLÉMENT);**

Par M. E. LANDAU, à Göttingen.

Dans le Tome XIX (1900) de la 3^e série de ce Recueil (p. 344-362 et 576), j'ai publié un Mémoire sous ce titre. Son résultat principal est le théorème du n^o IV, cité seul dans mon résumé au Tome XXXI du *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* (p. 183-184) et dans les Traités sur la *Théorie des nombres* par KRONECKER-HENSEL (t. I, p. 500-501) et BACHMANN (*Niedere Zahlentheorie*, t. I, p. 64). Je n'ai rien à ajouter concernant ce théorème. Mais tout récemment MM. Hurwitz et Pólya ont remarqué indépendamment que la démonstration du théorème à la fin du n^o III (qui n'est pas appliqué dans la suite ni dans aucun de mes travaux ultérieurs) contient une inexactitude. Elle est cependant, comme M. Pólya me l'a communiqué bientôt après, facile à rectifier, de sorte que le théorème même du n^o III est juste.

Étant données (¹) q formes linéaires à coefficients

(¹) Je numérote ici consécutivement les

$$u_{\sigma} \quad (1 \leq \sigma \leq m) \quad \text{et} \quad v_{\tau} \quad (1 \leq \tau \leq n)$$

du n^o III.

entiers avec r variables x_i ($i = 1, \dots, r$)

$$L_\nu(x) = \gamma_{\nu 1} x_1 + \dots + \gamma_{\nu r} x_r \quad (\nu = 1, \dots, q),$$

il s'agit de démontrer ceci : Soit donné un système de valeurs réelles z_1, \dots, z_r telles que les $L_\nu(z)$ sont tous ≥ 0 ; on peut trouver pour les variables des valeurs commensurables y_1, \dots, y_r telles que

$$(1) \quad [L_1(y)] = [L_1(z)], \quad \dots, \quad [L_q(y)] = [L_q(z)].$$

La preuve indiquée pour ceci à l'endroit cité est incorrecte; voici le raisonnement correct de M. Pólya :

On peut supposer qu'aucune des formes $L_\nu(x)$ ne soit identiquement nulle.

1. Si aucun des q nombres $L_\nu(z)$ n'est entier, l'assertion est évidente, puisque des changements suffisamment petits des x n'altèrent pas, dans ce cas, les nombres $[L_\nu]$.

2. S'il y a $s \geq 1$ entiers parmi les $L_\nu(z)$, supposons, ce qui est permis, que $L_1(z), L_2(z), \dots, L_s(z)$ ($1 \leq s \leq q$) soient entiers, que les formes $L_1(x), L_2(x), \dots, L_t(x)$ ($1 \leq t \leq s$) soient indépendantes, tandis que, pour $t < s$, les formes $L_{t+1}(x), \dots, L_s(x)$ en dépendent. Soit ω le nombre des variables dont L_1, \dots, L_t (ou, ce qui revient au même, L_1, \dots, L_s) dépendent *effectivement*.

a. Si $\omega = t$, les valeurs des ω variables sont rationnelles; on conserve ces valeurs pour le nouveau système (y) . Pourvu qu'on donne, pour $\omega < r$, aux $r - \omega$ variables restantes des valeurs rationnelles γ_i suffisamment rapprochées des anciennes valeurs z_i , (1) est satisfait.

b. Si $\omega > t$, on peut donner à certaines $r - t$ va-

riables des valeurs nouvelles et rationnelles s'écartant si peu des anciennes valeurs qu'en calculant les t autres variables au moyen des t équations linéaires

$$L_1(\gamma) = L_1(\alpha), \quad \dots, \quad L_t(\gamma) = L_t(\alpha),$$

(1) est satisfait; tous les γ seront rationnels.