

## Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 375-383

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_375\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__375_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.**

---

**Alger.**

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Question de cours. — *Intégration des différentielles totales.*

Problème. — 1<sup>o</sup> *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(qy - px)(x^2 - y^2) + r(x^2 + y^2) = 0;$$

2° Déterminer la fonction arbitraire d'intégration, de manière que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface. Donner dans ce cas la seconde famille des lignes asymptotiques;

3° Les surfaces ainsi définies dépendent encore d'une constante arbitraire  $k$ . Déterminer les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces (on se bornera à la projection sur le plan des  $xy$ ).

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne l'équation différentielle de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a - \frac{2}{e^x - e^{-x}} + (e^x + e^{-x}) \left( \frac{1}{e^x - e^{-x}} - a \right) y + a y^2,$$

$a$  étant une fonction donnée de  $x$ :

1° Démontrer qu'elle admet deux solutions  $y_1, y_2$  dont le produit est  $+1$ . Les déterminer:

2° Ramener à une quadrature l'intégration de l'équation;

3° Intégrer complètement dans le cas où

$$a = \frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)(e^x - e^{-x})}. \quad (\text{Juin 1912.})$$

### Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — 1° Étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \quad x^3 y'^2 - 3x^4 y y' + 2x^3 y^2 + y^3 = 0,$$

la substitution  $y = uz$ ,  $u$  et  $z$  étant deux fonctions de  $x$ , la transforme en une équation de même forme en  $z$ . Déterminer  $u$  de façon à faire disparaître le terme en  $z^2$ ;

2° Intégrer l'équation en  $z$  ainsi obtenue (on pourra prendre  $\frac{1}{z}$  comme inconnue);

3° Trouver l'enveloppe des solutions de l'équation (1); voir s'il y a une intégrale singulière;

4° Distinguer les points du plan par lesquels passent des intégrales réelles.

Deuxième question. — *L'équation*

$$(z-3)^2 u^2 - 2(z-1)u + 1 = 0$$

définit une fonction  $u(z)$  à deux déterminations :

- 1° Quels sont les points singuliers de la fonction  $u$ ?
- 2° Développer  $u$  en série au voisinage de ces points singuliers. On se bornera à trouver les quatre premiers termes des séries;

4° Choissant la détermination qui se réduit pour  $z = 4$  à  $3 + \sqrt{2}$ , indiquer sommairement sa variation lorsque  $z$  parcourt le cercle de centre  $O$  et de rayon  $4$ . Calculer  $\int u dz$  le long de ce cercle.

✓ ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$y^{(iv)} - y''' - 7y'' + 13y' - 6y = \sin 2x + (x^2 - 1)e^x + e^{-x}.$$

Déterminer toutes les intégrales qui passent au point  $x = 0, y = 1$  et qui admettent en ce point l'axe  $Oy$  comme tangente inflexionnelle. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$p(x^2 - y^2 - z^2) + 2qxy - 2x(z + 1) = 0.$$

- 1° Déterminer l'intégrale générale;
- 2° Trouver la surface intégrale qui passe par le cercle  $y = 1, x^2 + z^2 = 1$ ;
- 3° Trouver le lieu des centres de courbure principaux de cette surface relatifs aux points de ce cercle.

• Deuxième question. — *Déterminer une courbe gauche telle que les segments interceptés sur la tangente, à partir du point de contact par les plans  $x = 0, y = 0$ , aient respectivement des longueurs données  $a$  et  $b$ .*

*Dans quels cas la courbe obtenue est-elle algébrique? Examiner le cas particulier  $a = b$ .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations*

*différentielles du premier ordre*

$$\frac{dx}{dt} + x - y = t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - 4z = e^t,$$

$$\frac{dz}{dt} + 4z - x = e^{-3t}.$$

(Novembre 1912.)

### Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Déterminer les lignes asymptotiques  $C$ , autres que les génératrices rectilignes, de la surface réglée

$$x = Uv, \quad y = (aU + b)v, \quad z = u - v.$$

$U$  étant une fonction de  $u$ ,  $a$  et  $b$  deux constantes.

Déterminer, de la façon la plus générale, la fonction  $U$  de façon qu'il y ait une courbe  $C$ , autre que l'axe  $Oz$ , qui soit plane. Quelles sont alors les courbes  $C$  et la surface  $S$ ?

II. Former, en appliquant la méthode générale, une fonction  $f(z)$  de la variable complexe  $z$ , uniforme dans tout le plan et admettant comme pôles simples toutes les valeurs réelles entières positives et négatives, le résidu relatif au pôle  $n$  devant être  $n^p$  ( $p$  est un entier positif donné). Comparer la fonction obtenue à la fonction

$$\pi z^p \cot \pi z.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne en coordonnées rectangulaires la sphère et le cylindre

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Calculer :

1° Le volume du cylindre intérieur à la sphère;

2° L'aire de la surface qui limite ce volume.

(Novembre 1911.)

## Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires; M un point quelconque d'une surface; A, B, C les points d'intersection respectifs du plan tangent en M avec trois axes.

On propose de déterminer la surface par la double condition : 1° que, pour tout point M pris sur elle, la somme algébrique des trois segments  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  soit égale à zéro; 2° que la surface contienne la parabole

$$\begin{aligned}x &= 1, \\(z - y)^2 - 4y &= 0.\end{aligned}$$

II. 1° Trajectoires orthogonales des génératrices de la surface réglée définie en coordonnées rectangulaires par les formules

$$\begin{aligned}x &= (u + v) \cos u - f(u) \sin u, \\y &= (u + v) \sin u + f(u) \cos u, \\z &= uv,\end{aligned}$$

où  $u, v$  désignent deux paramètres arbitraires et  $f(u)$  une fonction donnée de  $u$ . Ramener cette recherche à une quadrature.

2° Déterminer la fonction  $f(u)$  par la condition que la surface soit développable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire l'une des courbes définies en coordonnées rectangulaires par l'équation différentielle

$$a dx + \sqrt{y^2 - a^2} dy = 0,$$

où  $a$  désigne une longueur constante donnée. Faire voir que la courbe possède un arc de symétrie.

(Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, on considère la surface développable, enveloppe du plan mobile,

$$2z - 2ux + u^2y - 2f(u) = 0,$$

où  $u$  désigne un paramètre arbitraire, et  $f(u)$  une fonction donnée de ce paramètre.

Faire voir que l'arête de rebroussement de la surface est une hélice.

Déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices, et faire voir que ces trajectoires sont des lignes planes.

Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont les surfaces développables qui correspondent à tous les choix possibles de la fonction  $f(u)$  dans l'équation du plan mobile, et déterminer celles d'entre ces surfaces qui contiennent la courbe

$$\begin{aligned}x &= 0, \\3z + 2y^3 &= 0.\end{aligned}$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère, dans le plan de notation graphique de la variable imaginaire  $z = x + iy$ , une ellipse dont le centre a pour coordonnées

$$x = 1, \quad y = 0,$$

le petit axe étant dirigé suivant  $Ox$ , le grand parallèle à  $Oy$ , et le grand axe double du petit : quelle est la plus grande longueur que l'on puisse donner au demi-petit axe pour que, dans la région intérieure à l'ellipse, l'expression  $(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  soit assimilable à quelque fonction uniforme, et combien existe-t-il de semblables fonctions?

En désignant par  $\varphi(z)$  celle de ces fonctions qui, pour  $z = 0$ , prend la valeur numérique  $+1$ , on examinera comment varie  $\varphi(z)$  sur les portions des axes  $Ox$ ,  $Oy$  intérieures à l'ellipse maximum.

On posera ensuite

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 4z^2)^2 [1 + 2z^2 - \varphi(z)]},$$

et, la variable  $z$  étant assujettie à se mouvoir à l'intérieur de l'ellipse maximum, on déterminera dans cette région les pôles  $H(z)$  avec les groupes correspondants des fractions simples.

On considérera enfin l'ellipse homothétique et concen-

trique dont le demi-petit axe a pour longueur  $\frac{11}{10}$ , et, désignant par A un point fixe situé sur le contour de cette dernière, on évaluera la variation numérique subie par une détermination quelconque de l'intégrale indéfinie  $\int H(z) dz$  quand la variable  $z$  décrit le contour de A en A dans le sens direct. (Juin 1913.)

### Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Trouver les trajectoires orthogonales des plans osculateurs d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution. Rayons de courbure et de torsion de ces trajectoires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer les surfaces qui satisfont à la condition  $OP, MN = \lambda \cdot \overline{OM}^2$ ,  $\lambda$  étant une constante, M un point de la surface, N le pied de la normale en M, P la projection de l'origine O sur le plan tangent en M. (Juin 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient

$$(1) \quad y'' + py' + qy = 0$$

une équation linéaire du second ordre, et

$$(2) \quad z'' + z'^2 + pz' + q = 0$$

sa transformée, en posant  $y = ez$ . On demande la condition pour que cette transformée (2) admette deux solutions  $z_1, z_2$  liées par la relation

$$z_2 = az_1,$$

$a$  étant une constante. Cette condition étant remplie, en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) et celle de l'équation (2).

Cas particulier où  $a = -1$ ,  $p = -\frac{1}{x}$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation

$$xy^2 y'^2 - y^3 y' + a^2 x = 0,$$



en posant  $y^2 = u$ ;

$$x u'^2 - 2 u' + 4 a^2 x = 0.$$

(Juin 1913.)

### Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Lignes de niveau, lignes de pente, lignes asymptotiques de la surface définie en coordonnées cylindriques par l'équation*

$$z = ar^m \sin m \psi.$$

Étudier le cas particulier où  $m = -2$ , d'abord en partant des résultats généraux obtenus pour une valeur quelconque de  $m$ ; et ensuite en partant de l'équation en coordonnées ponctuelles  $x, y, z$  de la surface, lorsque  $m = -2$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Volume limité par les surfaces*

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^3}{a^3}, \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

et par le plan mené parallèlement à  $yOz$  par les points de rencontre des traces des deux surfaces sur le plan  $xOy$ .

II. *Intégrer l'équation*

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - 4xy^2 - 2x(4r^2 + 3)y - 4r^3(x^2 + 1) = 0.$$

(Juillet 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étant donnée l'équation*

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) - a^2 = 0,$$

on demande :

- 1° Une solution complète de cette équation;
- 2° La nature des sections faites dans la surface que représente cette solution quand on coupe la surface par des plans parallèles à  $xOy$ ;

3° Les lignes asymptotiques de la même surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Solution singulière de l'équation*

$$9(1 + y)y^2 y'^2 = 4(1 - 3y)$$

déduite : 1° de cette équation différentielle; 2° de son intégrale générale.

*Lieux des points de rebroussement et des points d'inflexion des courbes intégrales.*

(Novembre 1911.)