Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 383-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__383_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2137.

(1909, p. 384)

En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ par $a - b$ a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse $a - b =$ mult. p, dans cette hypothèse seulement, et qu'il admet alors une seule fois [1].

(G. F.)

2e Solution,

Par l'auteur.

Soit

$$a^p - b^p = (a - b) \times Q,$$

$$Q = a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1}.$$

Un diviseur premier de $a^p - b^p$ divise $a - b$, ou Q, ou les deux. Quels facteurs premiers peuvent diviser à la fois $a - b$ et Q ? Si l'on a

$$a - b = \text{mult. } P, \qquad a = \text{mult. } P + b,$$

on aura

$$Q = \text{mult. } P + pb^{p-1};$$

P ne pourra être que p.

Ainsi les diviseurs premiers de Q autres que p sont les diviseurs premiers de $a^p - b^p$ qui ne divisent pas $a - b$; soit P un tel diviseur premier.

[1] Cette dernière partie de l'énoncé est en défaut pour $p = 2$.

Les valeurs de n pour lesquelles $a^n - b^n$ est multiple de P sont les multiples de la plus petite d'entre elles; comme $a^p - b^p$ est multiple de P, sans que $a - b$ le soit, pour la plus petite valeur de n; et comme $a^{p-1} - b^{p-1}$ est multiple de P d'après le théorème de Fermat, on a

$$P - 1 = \text{mult.}\, p.$$

C. Q. F. D.

Cherchons maintenant à quelle condition le quotient Q admet le diviseur p. Si l'on pose $a = b + h$, il vient

$$Q = \frac{(b+h)^p - b^p}{h}$$
$$= pb^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} b^{p-2}h + \ldots + pbh^{p-2} + h^{p-1}.$$

Tous les termes du développement, sauf le dernier, ont des coefficients divisibles par p; pour que Q admette le facteur p, il faut et il suffit que h, c'est-à-dire $a - b$, soit divisible par p. On a alors

$$\frac{Q}{p} = b^{p-1} + \ldots + bh^{p-2} + \frac{h}{p} h^{p-1}.$$

Si l'on n'excepte pas le cas $p = 2$, on a

$$\frac{Q}{p} = \text{mult.}\, p + b^{p-1};$$

le quotient $\frac{Q}{p}$ n'admet donc plus le facteur p.

(Je rappelle que je suis arrivé au cas particulier $p = 3$ par des considérations différentes, qu'il semble difficile d'étendre au cas général.)