Nouvelles annales de mathématiques

V. Jamet

Sur les systèmes conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 385-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__385_0>

[O'7a]

SUR LES SYSTÈMES CONJUGUÉS;

Par M. V. JAMET.

Les articles de M. Turrière (août 1912, avril 1913) suggèrent l'idée de traiter le problème suivant : *Trouver une surface sur laquelle il y ait un réseau conjugué se projetant sur un plan suivant un réseau donné.*

Soient, dans ce plan,

$$x = f(\alpha, \beta),$$
$$y = \varphi(\alpha, \beta)$$

les équations représentatives des courbes du réseau donné; il est toujours possible de former l'équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + A\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0,$$

à laquelle satisfont les fonctions x, y, et toute autre intégrale z de cette équation est la cote z du point courant sur la surface cherchée, exprimée en fonction de α et de β. (Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre I, Chap. IX, p. 84.)

Par exemple, si le réseau donné est formé de deux systèmes de coniques homofocales, l'équation différentielle ci-dessus est

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0;$$

elle appartient à une catégorie d'équations sur laquelle on trouvera dans l'Ouvrage précité (Livre III, Chap. IV) les plus précieux renseignements.

Mais il est des cas où l'emploi des coordonnées homogènes facilite singulièrement la solution, si l'on se rappelle le théorème de M. Darboux (*loc. cit.*, Livre III, Chap. IX, p. 98), d'après lequel un réseau conjugué est déterminé par tout système de quatre intégrales d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta = 0,$$

ces quatre intégrales étant les coordonnées homogènes (ponctuelles ou tangentielles) d'un point mobile sur la surface.

Pour en faire une application, nous supposerons que le réseau donné est formé par les cercles passant par deux points fixes et par ceux qui les coupent à angle droit. En les rapportant à deux axes de coordonnées dont le choix est tout indiqué, on trouvera, pour l'équation d'un des faisceaux de cercles,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + a^2 = 0$$

et, pour l'équation de l'autre faisceau,

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - a^2 = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et à y, on trouve

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\alpha(a^2 + \beta^2) + \beta\sqrt{(a^2 + \beta^2)(\alpha^2 - a^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ y &= \frac{\beta(\alpha^2 - a^2) + \alpha\sqrt{(a^2 + \beta^2)(\alpha^2 - a^2)}}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned} \right.$$

et deux autres formules qui ne diffèrent de celles-ci que par le signe du radical. On les transforme comme il suit :

$$x = \sqrt{a^2+\beta^2}\,\frac{\alpha\sqrt{a^2+\beta^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$= \sqrt{a^2+\beta^2}\,\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{a^2+\beta^2}-\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}} = \frac{\dfrac{a^2}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}},$$

et, de même,

$$y = \frac{\dfrac{a^2}{\sqrt{\beta^2+b^2}}}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}};$$

de sorte qu'on peut adopter les coordonnées homogènes X, Y, U, définies par les formules

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}, \qquad Y = \frac{a^2}{\sqrt{\beta^2+b^2}},$$
$$U = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}.$$

Ces trois fonctions vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

cas particulier de l'équation (1). Donc, on obtiendra les équations représentatives d'une des surfaces cherchées en joignant aux équations (2) l'équation suivante,

$$z = \frac{F(\alpha)+\Phi(\beta)}{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+b^2}}}$$

ou bien

$$z = \frac{[F(\alpha)+\Phi(\beta)]\sqrt{(\alpha^2-a^2)(\beta^2+b^2)}}{\alpha\sqrt{\beta^2+b^2}-\beta\sqrt{\alpha^2-a^2}},$$

$F(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ désignant deux fonctions arbitraires.