NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHEL PETROVITCH

Théorèmes de la moyenne sans restrictions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 400-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__400_1>

[D3cα]

THÉORÈMES DE LA MOYENNE SANS RESTRICTIONS;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. Soient u et v deux fonctions, réelles ou imaginaires, de la variable x. De l'identité

$$uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}(u - v)^2 \tag{1}$$

on tire

$$\int_a^b uv\,dx = \mathrm{V} - \delta, \tag{2}$$

où

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\int_a^b u^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b v^2\,dx, \tag{3}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\int_a^b (u-v)^2\,dx. \tag{4}$$

Sous la seule restriction, relative au chemin d'intégration, que celui-ci soit réel et de longueur finie, on voit que :

1° Si u et v ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune, l'expression $(u-v)^2$ est réelle et d'un signe invariable dans l'intervalle (a, b); par suite, on aura

$$\delta = \frac{b-a}{2}\chi(c)^2 \tag{5}$$

avec

$$\chi(x) = u - v$$

et c étant une valeur comprise entre a et b;

2° Si u et v diffèrent à la fois par leurs parties réelles et imaginaires, l'expression $(u-v)^2$ est imaginaire et l'on aura, d'après une proposition de M. Darboux,

$$\delta = \frac{b-a}{2}\theta\, e^{\omega i}\chi(c)^2, \tag{6}$$

θ et ω étant deux quantités réelles, comprises : la première entre o et 1, et la seconde entre o et 2π.

Il s'ensuit que

$$\int_a^b uv\,dx = \mathrm{V} - \lambda\chi(c)^2, \tag{7}$$

où λ *est un facteur dont le module ne surpasse* *jamais* $\frac{b-a}{2}$ *et qui se réduit à* $\frac{b-a}{2}$ *lorsque* u *et* v *ont soit la partie réelle, soit la partie imaginaire commune.*

L'intérêt que peut présenter cette forme du théorème de la moyenne consiste en ce qu'elle conduit à décomposer l'intégrale

$$(8) \qquad \int_a^b uv\,dx$$

en deux, dont l'une ne dépend que de u et l'autre de v, avec un terme correctif dont on connaît les limites supérieure et inférieure, *et cela sans aucune restriction sur* u *et* v *autre que celle que les intégrales aient un sens.*

Dans le cas de u et v réels, l'intégrale (8) est comprise entre

$$V - \frac{b-a}{2}M^2 \qquad \text{et} \qquad V - \frac{b-a}{2}N^2,$$

où M et N sont la plus grande et la plus petite valeur absolue que prend la différence $u - v$ lorsque x varie entre a et b. En prenant donc pour (8) la valeur

$$(9) \qquad V - (b-a)\frac{M^2+N^2}{4},$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(10) \qquad (b-a)\frac{M^2-N^2}{4}.$$

2. L'identité

$$(11) \qquad uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2$$

fournit

$$(12)\qquad \int_a^b uv\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx - \xi,$$

où

$$(13)\qquad \xi = \frac{1}{4}\int_a^b (u-v)^2\,dx.$$

Il s'ensuit que

$$(14)\qquad \int_a^b uv\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\chi(c)^2,$$

où $\chi(x)$, λ *et* c *ont les significations du paragraphe précédent*, et cela sans aucune restriction sur u et v autre que celle que les intégrales aient un sens.

Dans le cas de u et v réels, en posant

$$(15)\qquad \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx = \mathrm{W},$$

l'intégrale (12) est comprise entre

$$\mathrm{W} - \frac{b-a}{4}\mathrm{M}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{W} - \frac{b-a}{4}\mathrm{N}^2,$$

de sorte qu'en prenant pour (12) la valeur

$$(16)\qquad \mathrm{W} - (b-a)\frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}{8},$$

on commet une erreur dont la valeur absolue n'excède pas

$$(17)\qquad (b-a)\frac{\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2}{8}.$$

3. Les inégalités intuitives

$$(18)\qquad \left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{2}\int_a^b |u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b |v|^2\,dx,$$

$$(19)\qquad \left|\int_a^b uv\,dx\right| < \frac{1}{4}\int_a^b |u+v|^2\,dx,$$

comprises dans les propositions précédentes, ne sont que des cas particuliers des inégalités plus générales

$$(20)\quad \left|\int_L u_1 u_2 \ldots u_n\, dx\right| < \frac{1}{n}\int_L |u_1|^n\, dx + \ldots + \frac{1}{n}\int_L |u_n|^n\, dx,$$

$$(21)\quad \left|\int_L u_1 u_2 \ldots u_n\, dx\right| < \frac{1}{n^n}\int_L (|u_1| + \ldots + |u_n|)^n\, dx,$$

L étant l'arc d'intégration et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des fonctions de x quelconques, en nombre arbitraire. Elles sont la conséquence directe de la relation d'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique d'un nombre quelconque de quantités réelles positives.

Nous en ferons l'application suivante. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

les termes, réels ou imaginaires, d'une série, fonctions d'une variable t, la série étant supposée absolument et uniformément convergente pour les valeurs de t appartenant à un domaine déterminé (D) dans le plan de t.

Considérons la série

$$(22)\qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

ayant pour coefficient général a_n l'expression

$$(23)\qquad a_n = \int_L u_1 u_2 \ldots u_n\, dt,$$

l'arc d'intégration L étant de longueur finie et compris dans le domaine (D). De

$$(24)\qquad \sum_1^n |u_i| < \mu,$$

où μ est la somme de la série convergente

$$(25)\qquad \sum_1^\infty |u_i|,$$

on conclut, en vertu de (21), que

$$(26)\qquad |a_n| < \frac{s\mu^n}{n^n},$$

où s est la longueur de l'arc d'intégration.

On en conclut d'abord que : *la série* (22) *représente une fonction entière de z, du genre zéro ou un, dont le module est, pour toute valeur de z, plus petit que*

$$(27)\qquad |a_0| + s\,\Delta(\mu r),$$

où $\Delta(z)$ désigne la transcendante entière

$$(28)\qquad \Delta(z) = \frac{z}{1^1} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots$$

et r étant le module de z.

Or, la formule connue

$$(29)\qquad \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t}\right)^n = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

conduit à la formule

$$(30)\qquad \Delta(z) = z\int_0^1 e^{zt\log\frac{1}{t}}\,dt,$$

valable pour toute valeur réelle et imaginaire de z, faisant voir que

$$(31)\qquad \Delta(r) < r\,e^{\frac{r}{e}},$$

ce qui montre que : *le module de $f(z)$ est, pour toute* *valeur de z, plus petit que*

$$|a_0| + s\mu e^{\frac{\mu r}{e}}. \tag{32}$$

Il s'ensuit, par exemple, que l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r e^{\theta i})|\, d\theta,$$

rattachée à la fonction $f(z)$, a sa valeur plus petite que

$$\log\left(|a_0| + s\mu r e^{\frac{\mu r}{e}}\right),$$

d'où l'on peut tirer des conclusions à l'égard des zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur d'une circonférence quelconque décrite autour de $z = 0$ dans le plan de z.