Ch. Platrier

Sur les métacentres et les paramètres de distribution des courbes d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 451-458
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__451_1>

[O^{1}5f]

SUR LES MÉTACENTRES ET LES PARAMÈTRES DE DISTRIBUTION DES COURBES D'UNE SURFACE;

PAR M. CH. PLATRIER,
Docteur ès sciences mathématiques.

1. On appelle *normalie* relative à une courbe C d'une surface S la surface réglée N lieu des normales G menées à S par les points M de C.

On appelle *métacentre* de la courbe C en un point M le point central γ de la génératrice G de la normalie N.

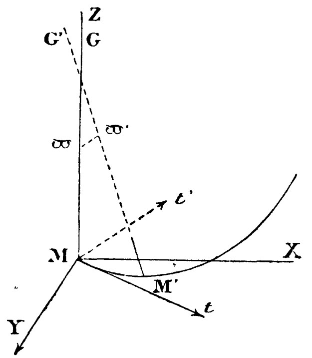
La distance $\mu = M\gamma$ et son inverse $\frac{1}{\mu}$ sont respectivement le *rayon de courbure métacentrique* et la *courbure métacentrique* de C en M. Rappelons que ces quantités ne dépendent que des éléments du premier ordre de la surface et sont les mêmes pour deux courbes C de S ayant en M même tangente Mt. Le *paramètre de distribution* K de la génératrice G de la normalie N jouit également de ces propriétés. Nous dirons donc indifféremment dans la suite que, en M, les quantités μ, $\frac{1}{\mu}$, K sont relatives à la direction Mt ou relatives à la courbe C de S tangente à Mt.

Dans plusieurs questions de Mécanique, et notamment dans l'étude de l'équilibre d'un corps flottant, les notions de métacentre et de paramètre de distribution sont avantageusement substituées aux notions de courbure normale et de torsion géodésique.

Je me propose ici de reprendre et compléter certains résultats déjà acquis concernant les métacentres et les paramètres de distribution. J'insisterai particulièrement sur les relations qui existent d'une part entre la courbure normale et la courbure métacentrique, d'autre part entre la torsion géodésique et le paramètre de distribution.

2. Calculons μ et K.

On sait que le point central γ peut être défini comme limite du pied ϖ sur G de la perpendiculaire com-



mune $\varpi\varpi'$ à G et à la génératrice rectiligne G$'$ de N infiniment voisine de G.

Rapportons la surface S à un trièdre trirectangle d'origine M et d'axes MX, MY tangents aux lignes de courbure passant par M.

μ ne dépendant que des éléments du premier ordre, nous pourrons calculer cette longueur en substituant à la surface S le paraboloïde

$$(1) \qquad Z = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{R} + \frac{Y^2}{R'}\right),$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux de S en M.

G′ est normale à S au point M′(x, y, z) de C infiniment voisin de M; ses équations sont

$$(2) \qquad \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

et, en vertu de (1), p et q sont, à des infiniment petits près, définis par

$$(3) \qquad p = \frac{x}{R}, \qquad q = \frac{y}{R'}.$$

$\varpi\varpi'$ est parallèle à l'intersection des plans tangents à S en M et M′, c'est-à-dire à la direction

$$(3') \qquad pX + qY = 0$$

du plan des XY, dont la position limite quand M′ tend vers M est la direction Mt' conjuguée de Mt.

Le Z du point ϖ est le même que celui du point ϖ' et est par suite défini par (2) et (3′), c'est-à-dire égal a

$$z + \frac{px + qy}{p^2 + q^2},$$

Faisons tendre M′ vers M et désignons respectivement par φ et φ' les angles de Mt et Mt' avec MX. Le Z du point ϖ tend vers le rayon de courbure métacentrique μ. En tenant compte de (1) et (3), on obtient donc l'égalité

$$(4)\qquad \mu = RR' \frac{R \sin^2\varphi + R' \cos^2\varphi}{R^2 \sin^2\varphi + R'^2 \cos^2\varphi},$$

et, comme Mt et Mt' sont des directions conjuguées,

$$(5)\qquad R \sin\varphi \sin\varphi' + R' \cos\varphi \cos\varphi' = 0,$$

si bien que la formule (4) peut s'écrire

$$(6)\qquad \mu = R \sin^2\varphi' + R' \cos^2\varphi'.$$

Remarquons que le plan tangent à la normalie N en γ est la limite du plan $M\varpi\varpi'$ quand M' tend vers M, c'est-à-dire le plan GMt'. Ce plan fait donc avec le plan tangent GMt à la normalie N en M l'angle $(\varphi' - \varphi)$ et une propriété bien connue du paramètre de distribution nous permet d'écrire

$$K = \mu \cot(\varphi' - \varphi);$$

soit, en vertu de (5) et (6),

$$(7)\qquad K = (R - R') \sin\varphi' \cos\varphi'.$$

3. Désignons par ρ'_n et τ'_g les rayons de courbure normale et de torsion géodésique relatifs à la direction Mt'.

Les formules d'Euler et d'O. Bonnet donnent respectivement

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho'_n} = \frac{\cos^2\varphi'}{R} + \frac{\sin^2\varphi'}{R'},$$

$$(9)\qquad \tau'_g = (R' - R) \sin\varphi' \cos\varphi'.$$

Les égalités (6) et (7), rapprochées respectivement des égalités (8) et (9), permettent donc d'écrire les deux relations :

$$\mu \rho'_n = RR', \tag{10}$$

$$K = -\tau'_g, \tag{11}$$

d'où la double proposition suivante :

Soient un point d'une surface et deux directions conjuguées dans le plan tangent en ce point :

1° *Le produit de la courbure métacentrique relative à une de ces directions par la courbure normale relative à l'autre est égal à la courbure totale de la surface au point considéré ;*

2° *Le paramètre de distribution relatif à une de ces directions est égal au signe près au rayon de torsion géodésique relatif à l'autre.*

4. De cette proposition fondamentale et des propriétés connues des courbures normales et des torsions géodésiques, on peut déduire des propriétés corrélatives des courbures métacentriques et des paramètres de distribution.

Ainsi, les théorèmes d'Appolonius appliqués à l'indicatrice donnent les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_n + \rho'_n = R + R', \\ &\rho_n \rho'_n \sin^2\theta = RR', \end{aligned}\right. \tag{12}$$

en désignant par ρ_n le rayon de courbure normale relatif à la direction Mt et en posant $\theta = \varphi' - \varphi$.

A ces relations correspondront, en vertu de (10), pour les rayons de courbure métacentrique, les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}, \\ &\frac{\sin^2\theta}{\mu\mu'} = \frac{1}{RR'}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

en désignant par μ' le rayon de courbure métacentrique relatif à la direction $\mathbf{M}t'$.

5. Nous allons, pour terminer, appliquer la proposition du paragraphe 3 ou plus exactement les formules (6) et (7) à un problème déjà étudié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (5e Cahier, 1900, p. 101 et suiv.).

Soient les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ en nombre quelconque n décrivant respectivement d'une manière continue n surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de telle façon qu'à chaque instant les plans tangents à ces surfaces aux points considérés restent parallèles.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres positifs ou négatifs dont la somme a n'est pas nulle et considérons le centre M des moyennes distances des masses $a_1, a_2, \ldots, a_n$ placées aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Ce point décrit une surface S.

La surface S a en M son plan tangent P parallèle aux plans tangents aux surfaces $S_1, S_2, \ldots, S_n$ aux points respectifs $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Soient, en effet, M', $M'_1, \ldots, M'_n$, $n+1$ points appartenant respectivement à $S, S_1, \ldots, S_n$ et qui se correspondent; supposons-les en outre infiniment voisins des points respectifs M, $M_1, \ldots, M_n$. Projetons sur une droite quelconque les segments MM', $M_1M'_1, \ldots, M_nM'_n$:

$$a\,pr.MM' = a_1\,pr.M_1M'_1 + a_2\,pr.M_2M'_2 + \ldots + a_n\,pr.M_nM'_n. \tag{14}$$

Si, en particulier, on choisit comme axe de projection une perpendiculaire au plan P, tous les termes du second membre sont nuls et, par suite, la projection de MM' est nulle, ce qui démontre que S correspond à $S_1, S_2, \ldots, S_n$ par plans tangents parallèles.

Rappelons que, si deux surfaces S_1, S_2 se correspondent par plans tangents parallèles, deux directions $M_1 t_1$, $M_2 t_2$ correspondantes dans les plans tangents à S_1 et S_2 aux points respectifs M_1, M_2 sont telles que leurs directions conjuguées $M_1 t'_1$, $M_2 t'_2$ sont parallèles. Ceci résulte immédiatement de ce que les plans tangents à S_1 et S_2 aux points M_1, M_2 d'une part, M'_1, M'_2 d'autre part, sont parallèles et qu'il en est, par suite, de même des intersections des plans tangents en M_1, M'_1 d'une part, M_2, M'_2 d'autre part.

En particulier, on voit que, si les directions conjuguées $M_1 t_1$ et $M_1 t'_1$ sont rectangulaires, les directions correspondantes $M_1 t_1$ et $M_2 t_2$ seront parallèles. Autrement dit, sur les surfaces S_1 et S_2, les lignes de courbure se correspondent et ont aux points correspondants leurs tangentes et, par suite, leurs plans osculateurs parallèles.

L'égalité (14) montre alors que si, pour les surfaces S, S_1, ..., S_n, on appelle respectivement ds, ds_1, ..., ds_n les éléments d'arcs en M, M_1, ..., M_n des lignes de courbure qui sont, en ces points, parallèles à une même direction :

$$(15) \qquad a\,ds = a_1\,ds_1 + a_2\,ds_2 + \ldots + a_n\,ds_n.$$

D'autre part, la remarque précédente établit que, pour ces lignes de courbure, les angles des plans osculateurs aux points M, M_1, ..., M_n respectivement avec les normales à S, S_1, ..., S_n ont la même valeur ϖ et que les angles de contingence des mêmes courbes aux mêmes points ont également la même valeur $d\varepsilon$.

Donc, en divisant les deux membres de l'égalité (15) par $\cos\varpi\,d\varepsilon$, on pourra écrire

$$(16) \qquad a\,R = a_1\,R_1 + a_2\,R_2 + \ldots + a_n\,R_n,$$

R, R_1, ..., R_n étant les rayons de courbure principaux des surfaces S, S_1, ..., S_n correspondant à une même direction principale aux points respectifs M, M_1, ..., M_n.

Or, il résulte d'une remarque précédente qu'à des directions correspondantes Mt, $M_1 t_1$, ..., $M_n t_n$ dans les plans tangents en M, M_1, ..., M_n aux surfaces respectives S, S_1, ..., S_n correspondent une même direction conjuguée. L'angle φ' de cette direction conjuguée avec une des directions principales communes aux surfaces S, S_1, ..., S_n aux points respectifs M, M_1, ..., M_n est donc constant.

On déduira alors des formules (6), (7) et (16) les relations :

$$a\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n. \tag{17}$$

$$aK = a_1K_1 + a_2K_2 + \ldots + a_nK_n, \tag{18}$$

μ, μ_1, ..., μ_n; K, K_1, ..., K_n désignant respectivement les rayons de courbure métacentrique et les paramètres de distribution relatifs aux points et directions correspondantes des surfaces S, S_1, ..., S_n. La formule (17) a été donnée dans le Mémoire cité plus haut; la formule (18) constitue, croyons-nous, un résultat nouveau.