NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

# Équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 13 (1913), p. 458-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__458_1>

[A3k]

# ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. La forme donnée précédemment à cette équation (*Nouvelles Annales*, 1912, p. 539) n'est pas la plus simple.

Si l'on considère l'un des six rapports anharmoniques de quatre quantités, son inverse et son complément à $1$ sont également parmi les valeurs des rapports anharmoniques de ces quantités; les six rapports sont, l'un d'eux étant $a$,

$$(1) \qquad a, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{-a}{1-a}, \quad \frac{-(1-a)}{a}, \quad \frac{1}{a}.$$

1° Si deux des quatre quantités sont égales, les valeurs du rapport anharmonique sont

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad -\infty;$$

les valeurs finies sont racines de l'équation

$$r^2(r-1)^2 = 0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2 - r + 1)^3 = 0.$$

Comme l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, cette équation est de la forme

$$(2) \qquad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = A;$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace $r$ par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

En tenant compte de ce que, pour $r = -1$, on a $A = \frac{4}{27}$, on trouve que l'équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré est, avec les notations ordinaires,

$$(3) \qquad \frac{r^2(r-1)^2}{(r^2-r+1)^3} = \frac{4}{27}\,\frac{S^3 - 27T^2}{S^3}.$$

**2.** Si l'on pose

$$r^2 - r = \theta,$$

l'équation (2) prend la forme très simple

$$\frac{\theta^2}{(\theta+1)^3} = A, \tag{2'}$$

et, pour chaque valeur de $\theta$, on a deux valeurs de $r$ complémentaires par rapport à 1; si l'on pose

$$r + \frac{1}{r} = \rho,$$

l'équation (2) devient

$$\frac{\rho - 2}{(\rho-1)^3} = A, \tag{2''}$$

et, pour chaque valeur de $\rho$, on a deux volumes inverses de $r$.

On obtient facilement l'équation (2) sous la forme (2′) sans avoir recours à des cas particuliers. Les valeurs de $r$ étant les nombres de la suite (1), l'équation en $r$ est, *en groupant les racines de somme* 1,

$$(r^2 - r + \alpha)(r^2 - r + \beta)(r^2 - r + \gamma) = 0,$$

ou

$$(\theta + \alpha)(\theta + \beta)(\theta + \gamma) = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\theta + 1 = 0,$$

ou

$$\theta^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\theta^2 + 3\theta + 1 = 0,$$

ou

$$(\theta+1)^3 - B\theta^2 = 0.$$

Pour obtenir la forme (2″), *on grouperait les racines de produit* 1, ce qui donnerait

$$(r^2 - \lambda r + 1)(r^2 - \mu r + 1)(r^2 - \nu r + 1) = 0,$$

ou

$$(\rho - \lambda)(\rho - \mu)(\rho - \nu) = 0,$$

etc.

3. *Remarque.* — Les valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\sin^2\alpha, \quad \cos^2\alpha, \quad \text{séc}^2\alpha, \quad -\text{tang}^2\alpha, \quad -\cot^2\alpha, \quad \text{coséc}^2\alpha.$$