Nouvelles annales de mathématiques

Paul Montel

Sur le théorème de d'Alembert et la continuité des fonctions algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 481-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__481_0>

[A3aα]

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT ET LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAUL MONTEL.

M. Goursat a donné une démonstration des théorèmes d'existence des fonctions implicites qui repose sur la méthode des approximations successives de M. Picard (1). Je voudrais montrer que cette méthode conduit aussi à une démonstration simple du théorème de d'Alembert et de quelques propositions fondamentales relatives aux fonctions algébriques.

1. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Considérons l'équation

$$z = \varphi(z) = t + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots + \alpha_m z^m \tag{1}$$

qui, pour $t = 0$, admet la racine $z = 0$; cette équation admet aussi une racine lorsque t est voisin de zéro.

Posons, en effet,

$$\begin{aligned} z_0 &= 0, \\ z_1 &= \varphi(0) = t, \\ z_2 &= \varphi(z_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n &= \varphi(z_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je dis que la suite $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ a une limite,

(1) *Sur la théorie des fonctions implicites* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 184-192).

racine de l'équation (1), lorsque n croît indéfiniment, à condition que t soit suffisamment voisin de zéro. Il suffit, pour cela, de démontrer que la série, dont le terme général est $u_n = z_n - z_{n-1}$, est convergente. Or on a

$$u_{n+1} = z_{n+1} - z_n = \varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1}) = \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^k - z_{n-1}^k)$$

ou

$$u_{n+1} = u_n \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^{k-1} + z_n^{k-2} z_{n-1} + \ldots + z_{n-1}^{k-1}).$$

Désignons par r un nombre supérieur aux valeurs absolues de z_n et z_{n-1}, par α'_k la valeur absolue de α_k, et par M un nombre supérieur à la somme

$$2\alpha'_2 + 3\alpha'_3 + \ldots + m\alpha'_m.$$

On aura, si $r < 1$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \sum k\alpha'_k r^{k-1} < \mathrm{M} r.$$

Soit alors r un nombre fixe inférieur à l'unité et à $\frac{1}{2\mathrm{M}}$, donnons à t une valeur dont le module soit inférieur à $\frac{r}{2}$; je dis que z_n est, quel que soit n, inférieur à r en valeur absolue. On a, en effet,

$$|z_1| < \frac{r}{2},$$

$$|z_2| < |t| + \alpha'_2 |z_1|^2 + \ldots + \alpha'_m |z_1|^m < \frac{r}{2} + \mathrm{M}r^2 < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

$$|z_3| < |t| + \alpha'_2 |z_2|^2 + \ldots + \alpha'_m |z_2|^m < \frac{r}{2} + \mathrm{M}r^2 < r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|z_n| < r,$$

$$\ldots\ldots$$

Donc, on a $|z_n| < r$, quel que soit n, et, par suite, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite z_n est convergente : désignons par z sa limite, z est racine de l'équation (1), car si dans l'égalité

$$z_{n+1} = \varphi(z_n)$$

on fait croître n indéfiniment, il vient

$$z = \varphi(z).$$

La proposition est établie.

2. Une conséquence immédiate du théorème que nous venons d'établir est la suivante :

Si l'équation

$$(2) \qquad f(z, u) = u + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

admet pour $u = u_0$ *une racine simple* z_0, *cette équation admet aussi une racine lorsque* u *est voisin de* u_0.

Posons en effet

$$z = z_0 + h, \qquad u = u_0 - t f'_z(z_0, u_0),$$

l'équation s'écrit alors, puisque $f(u_0, z_0) = 0$,

$$-t f'_z(z_0, u_0) + h f'_z(z_0, u_0) + \frac{h^2}{1.2} f''_{z^2}(u_0, z_0) + \ldots = 0$$

ou, puisque $f'_z(z_0, u_0)$ est différent de zéro,

$$h = t + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m.$$

Cette dernière équation possède, d'après le théorème précédent, une racine h lorsque t est voisin de zéro; donc l'équation considérée admet une racine z lorsque u est voisin de u_0.

3. J'établirai maintenant la proposition suivante :

Si l'équation $f(z, u) = 0$ n'admet pas de racine z pour $u = u_0$, elle n'a pas non plus de racine pour des valeurs de u voisines de u_0.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite de valeurs de u ayant pour limite u_0, pour chacune desquelles l'équation aurait une racine : soient

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

ces valeurs de u, et

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

les valeurs correspondantes de z. Désignons par N un nombre supérieur à tous les $|u_n|$ et aux nombres $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$, ..., $|a_{m-1}|$. On a [1]

$$|z_n| < 1 + \frac{N}{|a_m|}.$$

Les nombres z_n ayant leurs modules bornés, on peut extraire, de la suite qu'ils forment, une suite nouvelle

$$z_{p_1},\ z_{p_2},\ z_{p_3},\ \ldots,\ z_{p_n},\ \ldots$$

admettant une limite unique z_0 [2]. Je dis que z_0 est

---

[1] C'est ici que s'introduit l'hypothèse que le premier membre de l'équation est un polynome : le théorème précédent s'applique à une fonction transcendante entière; il n'en est plus de même pour celui qui nous occupe.

[2] On peut le montrer de la manière suivante : soit $z_n = x_n + iy_n$; les nombres x_n sont bornés : apppelons x_0 leur borne supérieure, par exemple; on peut extraire de la suite

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

une suite nouvelle

$$x_{q_1},\ x_{q_2},\ x_{q_3},\ \ldots,\ x_{q_n},\ \ldots$$

ayant pour limite unique le nombre x_0. Les nombres

$$y_{q_1},\ y_{q_2},\ y_{q_3},\ \ldots,\ y_{q_n},\ \ldots$$

sont aussi bornés : appelons y'_0 leur borne supérieure, par exemple;

une racine de l'équation $f(z, u_0) = 0$. On a, en effet,

$$f(z_{p_n}, u_{p_n}) = 0.$$

Or, si l'on fait croître n indéfiniment, z_{p_n} a pour limite z_0 et u_{p_n} a pour limite u_0; par suite, comme $f(z, u)$ est continue en z et en u,

$$f(z_0, u_0) = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. On ne peut donc pas supposer que l'équation admette des racines lorsque u est voisin de u_0.

4. Nous pouvons maintenant établir le théorème de d'Alembert. Considérons l'équation

$$(2) \qquad f(z, u) = u + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

et soient $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_k$ toutes les racines de l'équation dérivée en z

$$a_1 + 2a_2 z + \ldots + m a_m z^{m-1} = 0.$$

Pour que ζ_i soit racine de l'équation $f(z, u) = 0$, il faut que u prenne la valeur u_i donnée par l'équation

$$f(\zeta_i, u_i) = 0.$$

Marquons dans le plan de la variable u les points O, P_1, P_2, ..., P_k, correspondant respectivement aux valeurs $0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ de u [1]. Pour ces valeurs

on peut extraire de la suite y_{q_n} une suite nouvelle

$$y_{p_1}, \quad y_{p_2}, \quad y_{p_3}, \quad \ldots, \quad y_{p_n}, \quad \ldots$$

ayant pour limite unique y_0. Alors, la suite

$$z_{p_1}, \quad z_{p_2}, \quad z_{p_3}, \quad \ldots, \quad z_{p_n}, \quad \ldots$$

a pour limite unique z_0.

[1] Un ou plusieurs points P_i peuvent coïncider avec le point O, mais cela ne modifie en rien le raisonnement qui va suivre, car l'équation a toujours une racine simple en O.

de u, l'équation a une racine. Prenons une valeur quelconque de u différente des précédentes et soit Q le point correspondant dans le plan des u ; je dis que l'équation a une racine en Q. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi et traçons le segment OQ ; ce segment peut contenir ou non un point P_i; admettons d'abord qu'il n'en contienne aucun. Soit Q_1 le milieu de OQ : si l'équation n'a pas de racine en Q_1, je remplace le segment OQ par le segment OQ_1 ; si l'équation a une racine en Q_1, je remplace ce segment OQ par le segment Q_1Q. Appelons Q_1R_1 le nouveau segment et soit Q_2 son milieu; je remplacerai de la même manière ce dernier segment par un segment Q_2R_2, situé aussi sur OQ, ayant une extrémité en Q_2 et une longueur deux fois plus petite que celle du précédent, et ainsi de suite. Je forme de cette façon une suite infinie de segments

$$Q_1R_1, \quad Q_2R_2, \quad \ldots, \quad Q_nR_n, \quad \ldots$$

emboîtés chacun dans tous les précédents et ayant pour limite un point U. Considérons l'un de ces segments : pour l'une de ses extrémités, l'équation a une racine et, pour l'autre extrémité, elle n'a pas de racine; donc, dans le voisinage du point U, il y a des points où l'équation n'a pas de racine et des points où elle a une racine. Or, ce résultat est en contradiction avec les théorèmes précédents, car, si l'équation a une racine en U, cette racine est simple puisque le segment OQ ne contient aucun point P_i, et l'équation a une racine pour tous les points voisins de U et, si elle n'a pas de racine en U, elle n'a pas de racine dans le voisinage de U.

Supposons maintenant que le segment OQ contienne l'un des points P_i et soit Q' un point du plan choisi de manière que ni le segment OQ′, ni le segment QQ′ ne contiennent aucun point P_i. D'après le raisonnement précédent appliqué au segment OQ′, l'équation a une racine en Q′ et, en répétant sur le segment QQ′ le même raisonnement dans lequel le point Q′ jouerait maintenant le rôle du point O, on montrerait de la même manière que l'équation a une racine au point Q (1). Le théorème est donc démontré.

5. Nous avons démontré dans les paragraphes **1** et **2** que, si une équation algébrique (2) admet une racine simple pour $u = u_0$, elle a aussi une racine dans le voisinage de u_0. En examinant de plus près le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat, nous en tirerons des conséquences plus précises. Considérons d'abord l'équation (1)

$$(1) \qquad z = t + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots + \alpha_m z^m = \varphi(z);$$

lorsque le module de t est inférieur à $\frac{r}{2}$, cette équation admet une racine z donnée par le développement en série

$$(3) \qquad z = \sum_{n=1}^{n=\infty} [\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})],$$

dans lequel les termes sont des polynomes entiers en t, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$; le module du terme général est inférieur à $\frac{1}{2^n}$, donc cette série est uniformément convergente pour $|t| < \frac{r}{2}$ et la somme z est une fonction continue de la variable t dans le cercle $|t| < \frac{r}{2}$.

(1) On pourrait aussi joindre le point Q au point O par un arc de courbe ne rencontrant aucun point P_i et répéter sur l'arc OQ le raisonnement fait au début sur le segment rectiligne OQ.

Cette racine est la seule dont le module soit inférieur à r. Soit en effet ζ une autre racine de module inférieur à r; on a $\zeta = \varphi(\zeta)$, donc

$$z_{n+1} - \zeta = \sum_{k=2}^{k=m} \alpha_k (z_n^k - \zeta^k);$$

par suite,

$$|z_{n+1} - \zeta| < |z_n - \zeta| \times \sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k r < \frac{1}{2} |z_n - \zeta|,$$

d'où

$$|z_{n+1} - \zeta| < \frac{1}{2^n}(z_1 - \zeta);$$

donc la suite $z_n - \zeta$ a pour limite o lorsque n croît indéfiniment, c'est-à-dire que $z = \zeta$, ce qui contredirait l'hypothèse. La racine z est d'ailleurs une racine simple : en effet, une racine multiple de l'équation (1)

$$z = \varphi(z)$$

devrait vérifier l'équation

$$1 = \varphi'(z);$$

or, puisque $|z|$ est inférieur à r, on a

$$|\varphi'(z)| < \sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k r < \frac{1}{2},$$

donc $\varphi'(z)$ ne peut être égal à l'unité.

Le terme général de la série (3) est un polynome entier en t, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$; supposons que les α_i varient de manière à toujours vérifier l'inégalité

$$\sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k < \mathrm{M};$$

on en déduit que la racine z est une fonction continue des variables t, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans le voisinage des valeurs initiales.

Passons maintenant à l'équation (2); la valeur de $z - z_0$ est donnée par la série placée au second membre de l'égalité (3) dans laquelle on a fait les substitutions

$$t = -\frac{u - u_0}{f'_z(z_0, u_0)}, \qquad \alpha_i = -\frac{f_{z^i}^{(i)}(z_0, u_0)}{i!\, f'_z(z_0, u_0)}.$$

La racine z est donc fournie par une série dont les termes sont des fractions rationnelles par rapport aux coefficients u, a_1, a_2, ..., a_m de l'équation. Supposons que ces coefficients varient de manière à satisfaire aux inégalités

$$\sum_{k=2}^{k=m} k\alpha'_k < \mathrm{M}, \qquad \left|\frac{u - u_0}{f'_z(a_0, u_0)}\right| < \frac{r}{2},$$

on en conclut que, *si l'équation* (2) *a une racine simple pour*

$$u = u_0, \qquad a_1 = a_1^0, \qquad \ldots, \qquad a_m = a_m^0,$$

elle admet une racine simple unique voisine de la première, lorsque les coefficients u, a_1, ..., a_m *sont voisins de* u_0, a_1^0, ..., a_m^0, *et cette racine est une fonction continue des coefficients.*

Remarquons enfin que, si les coefficients sont réels, les termes des séries ont aussi leurs coefficients réels et leur somme est réelle : donc, *si l'équation* (2), *supposée à coefficients réels, admet, pour des valeurs déterminées des coefficients, une racine simple réelle, elle admet aussi une racine simple réelle et continue pour des valeurs voisines de ces coefficients.*

6. Le mode de raisonnement qui nous a servi dans la démonstration du théorème de d'Alembert peut

aussi être utile dans un certain nombre de questions relatives à la continuité des racines d'une équation algébrique.

Supposons, par exemple, que les coefficients de l'équation

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m = 0$$

soient des fonctions continues réelles de deux variables réelles x et y, des polynomes par exemple, et proposons-nous de déterminer le nombre des racines réelles de cette équation suivant la position occupée par le point P, de coordonnées x, y dans un plan rapporté à deux axes Ox, Oy. D'abord, si au point P l'équation a toutes ses racines simples, le nombre des racines réelles est le même pour le point P et pour les points voisins de P.

Construisons alors la courbe C, lieu des points P pour lesquels l'équation a une racine double; cette courbe partage le plan en régions et je dis que, dans chacune de ces régions, le nombre des racines réelles demeure le même. Soient en effet A et B deux points appartenant à la même région; je vais démontrer que le nombre des racines réelles est le même en A et en B : supposons qu'il n'en soit pas ainsi et traçons le segment AB. Admettons d'abord que ce segment ne traverse pas la courbe C et désignons par A_1 le milieu de AB. L'un au moins des deux segments AA_1 ou A_1B est tel que le nombre des racines réelles n'est pas le même à ses deux extrémités. Je remplace le segment AB par l'un de ces segments, de longueur moitié moindre, que j'appelle A_1B_1 ; j'opère de la même manière sur le segment A_1B_1 et je le remplace par un nouveau segment A_2B_2, etc. Je construis par ce procédé une suite infinie de segments emboîtés AB, A_1B_1, A_2B_2,...

qui ont un point limite P. D'après la définition de ce point, il y a dans son voisinage des points A_i et B_i pour lesquels les nombres des racines réelles sont différents. Or ce résultat est en contradiction avec la remarque que nous avons faite au début, car, le point P n'étant pas situé sur la courbe C, l'équation n'a que des racines simples en ce point et par suite le nombre de celles de ces racines qui sont réelles est le même pour tous les points voisins de P. Admettons maintenant que le segment AB rencontre C, nous irons de A en B par une ligne polygonale dont les côtés seront assez petits pour que cette ligne ne rencontre pas C. Pour deux sommets consécutifs de cette ligne polygonale, le nombre des racines réelles est le même; donc il est le même aux deux extrémités de la ligne. L'application du résultat précédent aux surfaces algébriques est évidente.

7. Considérons encore l'équation

$$a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_m(x)y^m = 0$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en x à coefficients réels et qui représente par conséquent une courbe algébrique L. Marquons sur l'axe des x toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'équation admet une racine multiple en y. En appliquant aux segments ainsi déterminés sur l'axe des x le raisonnement qu'on a fait tout à l'heure pour le segment AB, on établirait que le nombre des racines réelles de l'équation en y demeure le même lorsque x reste à l'intérieur de l'un de ces segments. On déduit aisément de là, par un raisonnement classique, que le nombre des branches de la courbe L qui aboutissent en un point simple ou multiple de cette courbe est toujours pair. La même méthode, appliquée aux coefficients angulaires des tangentes en un point quelconque de la courbe, montrerait, de la même manière, que le nombre des branches tangentes à une même droite en un point donné est toujours pair. On démontre ainsi *qu'une courbe algébrique n'a ni point d'arrêt ni point anguleux.*

On voit que ces démonstrations ne supposent pas qu'on ait établi au préalable le théorème général de la continuité des fonctions algébriques, mais seulement la proposition relative à l'existence d'une racine simple, c'est-à-dire le théorème d'existence des fonctions implicites.