

L. BRAUDE

**Sur quelques applications des  
coordonnées intrinsèques**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1913), p. 492-513

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1913\\_4\\_13\\_\\_492\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__492_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[O'2q]

**SUR QUELQUES APPLICATIONS DES COORDONNÉES  
INTRINSÈQUES;**

PAR M. L. BRAUDE, à Bierstadt-Wiesbaden.

---

I.

1. En divisant les rayons de courbure d'une courbe plane (C) en un rapport constant donné ( $\lambda$ ), de sorte que  $\lambda = \infty$  corresponde à la courbe (C) elle-même,  $\lambda = 0$  à sa développée, on aura (1) comme lieu du

---

(1) L. BRAUDE, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911); *Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden* (*Monatshefte für Math. und Physik*, Vienne, t. XXIII, 1912, p. 283-288). — F.-G. TEIXEIRA, *Sur les courbes à développée intermédiaire circulaire* (*Monatshefte*, t. XXIV, 1913, p. 347-354). — E. TURRIÈRE, *Généralisation des courbes de Ribaucour* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. XIII, juin 1913). — L. BRAUDE, *Les déve-*

point diviseur une courbe associée que j'ai désignée comme *développée intermédiaire*  $(\lambda)$  [Zwischenevolute  $(\lambda)$ ]. On peut se servir de ces dérivées pour simplifier la construction du rayon de courbure, pour rectifier des courbes bien connues, enfin comme bases curvilignes pour une génération uniforme de  $(C)$  infinie de l'ordre 2 ou pour une autre génération de  $(C)$  infinie du premier ordre <sup>(1)</sup>.

Comme la normale de la développée intermédiaire  $(\lambda)$  de  $(C)$  contient toujours le point diviseur correspondant du rayon de courbure  $R_1$  de la développée  $(C_1)$  et comme la normale d'une roulette passe toujours par le point de contact du profil générateur et de la base curviligne, nous allons déterminer la courbe  $M_\lambda$ , qu'il convient de faire rouler sur la développée intermédiaire  $(\lambda)$  de  $(C_1)$ , pour avoir comme roulette d'un point immobile la développée intermédiaire  $(\lambda)$  de la courbe  $(C)$ .

2. La normale du point courant  $A$  de  $(C)$  forme avec celle du point correspondant  $P_\lambda$  de la développée intermédiaire  $(\lambda)$  de  $(C)$  un angle  $\varphi$ , pour lequel on a <sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \text{tang } \varphi = \frac{R_1}{\lambda R} = \frac{dR}{\lambda ds}.$$

De même l'angle  $\varphi_1$  de la normale du point diviseur  $P'_\lambda$  de  $R_1$  avec celle de  $(C_1)$  est déterminé par

$$(2) \quad \text{tang } \varphi_1 = \frac{R_2}{\lambda R_1} = \frac{dR_1}{\lambda dR},$$

La tangente  $P_\lambda Q$  de  $P_1$  forme donc avec  $P'_1$ .

*loppées imparfaites des spirales sinusoides, des courbes de Ribaucour et des coniques* (*Giornale di Mat. di Battaglini*, t. L, 1913, p. 310-328).

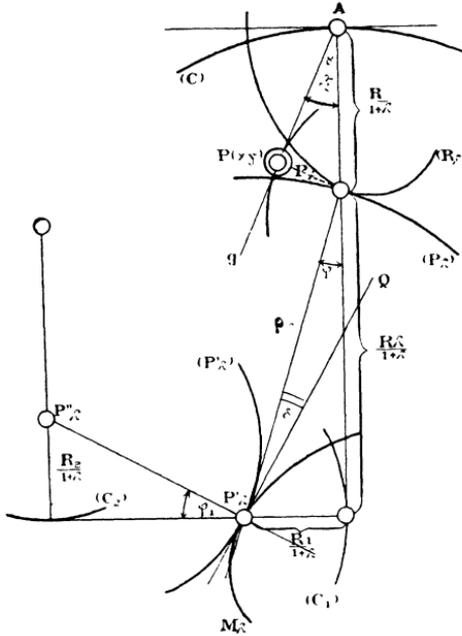
<sup>(1)</sup> L. BRAUDE, *Thèse*, p. 14 et 48.

<sup>(2)</sup> L. BRAUDE, *Thèse*, p. 15.

l'angle

$$(3) \quad \mathfrak{S} = \sphericalangle P_\lambda P'_\lambda Q = \varphi_1 - \varphi.$$

Pour la courbe  $M_\lambda$  on a donc les trois propriétés :



1° L'arc  $s_\lambda$  est égal à celui de  $(P_\lambda)$ , savoir <sup>(1)</sup>

$$(4) \quad s_\lambda = \frac{1}{1+\lambda} \int \sqrt{\lambda^2 dR^2 + dR_1^2};$$

2° L'angle entre le rayon vecteur et la tangente est

$$(5) \quad \mathfrak{S} = \varphi_1 - \varphi;$$

3° Le rayon vecteur  $P_\lambda P'_\lambda = \rho_\lambda$ , où

$$(6) \quad \rho_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda^2 R^2 + R_1^2}}{1+\lambda}.$$

(1) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 14.

On aura donc les coordonnées polaires  $\rho$ ,  $\omega$  de  $M_\lambda$  par application de deux équations de ces trois; on a, par exemple,

$$\text{tang } \mathfrak{F} = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

ou, en appliquant (1) et (3),

$$(7) \quad \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\lambda(RR_2 - R_1^2)}{R_1(\lambda^2 R^2 + R_1^2)};$$

en introduisant encore  $\rho$  et  $d\rho$  suivant l'équation (6), on aura

$$(7') \quad d\omega = \frac{ds}{R} \frac{\lambda(RR_2 - R_1^2)}{\lambda^2 R^2 + R_1^2};$$

d'où il résulte (4)

$$(8) \quad \omega = \text{arc tang } \frac{R_1}{\lambda R}.$$

Suivant les coordonnées polaires de  $M_\lambda$ , représentées par (6) et (8), on aura facilement les coordonnées cartésiennes, savoir :

$$(9) \quad x = \frac{\lambda R}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{R_1}{1 + \lambda}.$$

Soit l'équation intrinsèque de (C)

$$(10) \quad f(s, R) = 0;$$

celle de (C<sub>1</sub>) :

$$(11) \quad f_1(R, R_1) = 0;$$

On appelle (2) donc la courbe à l'équation carté-

(1) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 22.

(2) A. MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 501. Paris, Gauthier-Villars, 1895. — H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven (Sammlung Schubert, t. LVI, p. 227; Leipzig, Göschen, 1906).*

sienne

$$(12) \quad f_1(x, y) = 0$$

la courbe de Mannheim à base rectiligne de (C).

De là il résulte :

Quand on fait rouler sur la développée intermédiaire ( $\lambda$ ) de (C<sub>1</sub>) [(C<sub>1</sub>) étant représentée par  $f_1(s, R) = 0$ ] la courbe à l'équation cartésienne

$$(13) \quad f_1\left[\frac{x(1+\lambda)}{\lambda}, y(1+\lambda)\right] = 0,$$

on aura comme roulette d'un point quelconque de l'axe des  $x$  la développée intermédiaire ( $\lambda$ ) d'une développante de (C<sub>1</sub>); l'enveloppe de l'axe des  $x$  est la courbe (C<sub>1</sub>) elle-même (1). Sur les développées intermédiaires ( $\lambda$ ) et ( $-\lambda$ ) on fait rouler deux courbes semblables dans le rapport  $1 - \lambda : 1 + \lambda$ .

3. L'équation intrinsèque de (C) étant (2)

$$(14) \quad s = m \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^{2n} - 1}},$$

on peut la remplacer par les deux équations

$$(15) \quad \begin{cases} s = c \int \sin^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{m} \varphi\right) d\varphi, \\ R = c \sin^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{m} \varphi\right). \end{cases}$$

Alors, sur la développée intermédiaire ( $\lambda$ ) de la dé-

(1) These, p. 48.

(2) G. LORIA, *Spezielle ebene Kurven*, 2<sup>e</sup> édition, Leipzig, G.-B. Teubner, 1911, t. II, p. 295.

veloppée, il faut faire rouler la courbe

$$(16) \quad \begin{cases} x = \frac{c\lambda}{1+\lambda} \sin^{-\frac{1}{n}} \omega, \\ y = \frac{c}{m(1+\lambda)} \sin^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)} \omega \cos \omega \quad \left( \frac{n}{m} \omega = \varphi \right). \end{cases}$$

Si  $\lambda = \pm \frac{1}{m}$ , cette courbe est une *courbe multiplicatrice* de Clairaut (1).

En faisant  $n = 1$ , on aura comme courbe (14) une *épicycloïde*, qui a la représentation usuelle (2)

$$(17) \quad \begin{cases} x = r \left[ \frac{1+m}{m} \cos m\varphi - \cos(1+m)\varphi \right], \\ y = r \left[ \frac{1+m}{m} \sin m\varphi - \sin(1+m)\varphi \right]. \end{cases}$$

Celle de la *développée intermédiaire* ( $\lambda$ ), c'est-à-dire d'une *épitrochoïde* (3) de même module, est alors

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 = r_1 \left[ \frac{1+m}{m} \cos m\varphi - \frac{h_1}{r_1} \cos(1+m)\varphi \right], \\ y_1 = r_1 \left[ \frac{1+m}{m} \sin m\varphi - \frac{h_1}{r_1} \sin(1+m)\varphi \right]. \end{cases}$$

où

$$(18') \quad r_1 = r \frac{\lambda(2m+1)+1}{(\lambda+1)(m+1)}, \quad h_1 = r \frac{\lambda(2m+1)-1}{(\lambda+1)(2m+1)}.$$

(1) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 379. — C. DE JANS, *Les multiplications de Clairaut* (Gand, 1912). — L. BRAUDE, *Ueber Roll- und Fusspunktcurven* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 286); *Die Teilkurven der Polarnormale und Polartangente* (*Ibid.*, t. XXXIV, 1913, p. 127-139).

(2) SERRET-SCHEFFERS, *Differential- und Integralrechnung*, 2<sup>e</sup> édition, t. I, p. 390. Leipzig, Teubner, 1905.

(3) H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 230. — F.-G. TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. II, p. 202 (Coinbre, 1909). — L. BRAUDE, *Thèse*. p. 25.

La courbe (17) étant semblable à sa développée, on aura le théorème général :

*Quand on fait rouler l'ellipse*

$$(19) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + y^2(2m+1)^2 = \left[ \frac{2r(m+1)}{\lambda+1} \right]^2$$

sur l'épicycloïde allongée ou raccourcie (18), on aura comme roulette du centre une trochoïde semblable à la base curviligne; en remplaçant ( $\lambda$ ) par ( $-\lambda$ ), on aura une seconde génération par le roulement d'une ellipse semblable sur une autre épitrochoïde.

EXEMPLES. — *a.* Si  $2m+1=3$ , c'est-à-dire  $m_1=1$  ou  $m_2=-2$ , la courbe (17) est une *cardioïde* (1), dont les développées intermédiaires sont des *limaçons de Pascal*; de là il résulte :

*En faisant rouler l'ellipse*

$$(20) \quad x^2 + 9\lambda^2 y^2 = \left( \frac{a\lambda}{1+\lambda} \right)^2$$

sur le limaçon de Pascal

$$(21) \quad \rho = \frac{a}{12(1+\lambda)} [3\lambda + 1 + (3\lambda - 1) \cos \varphi],$$

ce qui est la développée intermédiaire ( $\lambda$ ) de la cardioïde

$$(21') \quad r = \frac{a}{4}(1 + \cos \varphi) \quad \text{ou} \quad 9R^2 + s^2 = a^2,$$

on aura comme roulette du centre un limaçon qui

(1) G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 152. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 133. — R.-C. ARCHIBALD, *The cardioïde and some of its related Curves*, p. 28 (Thèse, Strasbourg, 1900).

est à (21) comme 3 : 1; l'enveloppe de l'axe des  $x$  est la cardioïde (21').

b. La cycloïde ( $m = 0$ ) étant congruente à ses développées successives, il résulte :

Quand on fait rouler l'ellipse

$$(22) \quad \frac{x^2}{4(r+h)^2} + \frac{y^2}{4(r-h)^2} = 1$$

sur la trochoïde (1)

$$(22') \quad x = r\varphi - h \sin \varphi, \quad y = r - h \cos \varphi,$$

la roulette du centre de (22) est une trochoïde congruente, représentant la développée intermédiaire

$\lambda = \frac{r+h}{r-h}$  de la cycloïde

$$(22'') \quad x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

c. Les développées intermédiaires des para- et des hypercycloïdes

$$(23) \quad \frac{s^2}{a^2} - \frac{R^2}{b^2} = \pm 1,$$

sont des para- ou des hypertrochoïdes, sur lesquelles il faut faire rouler des hyperboles, pour avoir comme roulette du centre des hyper- ou des paratrochoïdes.

4. Le théorème général au n° 2 contient encore quelques autres cas remarquables. Si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \infty$ , l'équation (9) représente l'axe des  $y$  ou des  $x$ , qu'il faut faire rouler sur la développée pour engendrer la développante comme roulette d'un point situé sur cet

---

(1) L. BRAUDE, *Giorn. di Batt.* (loc. cit.).

axe. Sur la *développée moyenne* ( $\lambda = 1$ ) de C, on fait rouler une courbe semblable à la courbe de Mannheim de C dans le rapport 1 : 2. En posant  $x' = x(1 + \lambda)$ ,  $y' = y(1 + \lambda)$ , et alors  $\lim \lambda = -1$ , on aura par un passage à la limite la *radiale* — lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux rayons de courbure — ; la courbe (g) est alors la courbe de Mannheim et nous aurons le théorème dérivé d'une autre manière par l'auteur dans un autre article (1) :

*Quand on fait rouler la courbe de Mannheim de C sur la radiale, de sorte que l'axe des x passe toujours par le pôle, on aura comme roulette d'un point de l'axe des x la radiale d'une développante de C.*

Pour les *épi-* ou les *hypocycloïdes* on fait rouler une certaine *ellipse* (E) sur une *rhodonnée* (R), alors la roulette du centre est une *rhodonnée* semblable (R'), celle d'un autre point de l'axe des x est une *conchoïde* de (R'). Mais comme (2) la développée intermédiaire  $\lambda = -\frac{1}{(2m+1)^2}$  de (17) est une *rhodonnée* semblable à la radiale, on aura encore une *autre génération des rhodonnées et de leurs conchoïdes* toute semblable à la première.

Si  $\lambda = \pm \frac{1}{2m+1}$ , la développée intermédiaire (3) est le cercle fixe, sur lequel il faut faire rouler comme courbe (g) une circonférence, pour avoir la cycloïdale elle-même comme enveloppe de l'axe des x, c'est-à-dire

(1) L. BRAUDE, *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 138.

(2) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 25.

(3) *Thèse*, p. 15. Voir aussi E. TURRIÈRE, *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXVI, 1913).

d'un diamètre (1). La roulette du centre est un cercle concentrique, mené par les rebroussements de la développante semblable, celle des points extrêmes de ce diamètre est une cycloïdale, qui est la développée intermédiaire  $\lambda = \pm \frac{1}{2m+1}$  de la développante à points triples (2).

La roulette d'un point quelconque du diamètre étant une trochoïdale du même module, il résulte :

*Les développées intermédiaires*

$$\lambda = \pm \frac{1}{2m+1} \left( = \pm \frac{b}{a} \right)$$

*des courbes parallèles de la cycloïdale (17) sont deux trochoïdales, sur lesquelles il faut faire rouler toujours deux limaçons de Pascal ou deux cycloïdes allongées ou raccourcies pour engendrer la développante comme roulette du pôle ou comme enveloppe de l'axe des x.*

*Pour les développantes de la néphroïde de Proctor (épicycloïde à deux rebroussements), les développées intermédiaires sont deux limaçons de Pascal, dont nous en avons trouvé l'un dans un autre article (3).*

De même, pour les astroïdes obliques (développantes de l'astroïde régulière) la développée intermédiaire  $\lambda = -2$  est une certaine trochoïde, la développée

(1) A. MANNHEIM, *Géom. cinémat.*, p. 11. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 206.

(2) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 43; *Ueber Parallelkurven von Epitund Hypozykloiden* (*Monatshefte*, Vienne, t. XXIV, 1913, surtout p. 192); Question dans l'*Intermédiaire*. t. XIX, 1912, p. 217; Réponses, t. XX, 1913, p. 31 et 108.

(3) Voir la note précédente, *Monatshefte*, p. 195.

intermédiaire  $\lambda = 2$  est une *ellipse*, sur laquelle on fait rouler le limaçon pour engendrer l'astroïde oblique comme roulette; pour l'astroïde régulière l'ellipse est un cercle, pour l'astroïde à deux points triples, on aura un diamètre, sur lequel on fait rouler une cardioïde (<sup>1</sup>).

Enfin pour les *para-* ou les *hypercycloïdes* (<sup>2</sup>) les développées intermédiaires sont des *para-* ou des *hyper-*trochoïdes; pour le roulement mentionné le profil générateur est une hyperbole, la roulette du centre est une *hyper-* ou une *paratrochoïde*.

Si, par exemple, la base curviligne est une *Summen-* ou *Differenzenspirale* (<sup>3</sup>)

$$(24) \quad r = a(e^{m\varphi} \pm e^{-m\varphi}),$$

la roulette est une *Differenzen-* ou *Summenspirale*.

## II.

§. Regardons quelques exemples d'une génération uniforme des courbes, mentionnée dans un autre article (<sup>1</sup>):

*Nous allons déterminer pour quelques courbes (C) la courbe  $\Phi_\lambda$ , qu'il faut faire rouler sur le lieu du point  $P_\lambda$ , divisant la normale polaire de (C) dans un rapport constant  $\lambda : 1$ , pour avoir comme roulette la courbe (C) elle-même.*

Les coordonnées polaires de  $\Phi_\lambda$  sont [après deux

(<sup>1</sup>) H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 302.

(<sup>2</sup>) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 119. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. II, p. 218. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 211.

(<sup>3</sup>) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 68. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 262.

(<sup>4</sup>) L. BRAUDE, *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1913, p. 138.

corrections des équations (66) et (69) de l'article que nous venons de citer]

$$(25) \quad \rho = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1 + \lambda}, \quad \varphi = \lambda\omega + \text{arc tang } \frac{r'}{r},$$

d'où l'on aura les coordonnées cartésiennes, savoir :

$$(25') \quad x = \frac{r \cos \lambda\omega - r' \sin \lambda\omega}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{r \sin \lambda\omega + r' \cos \lambda\omega}{1 + \lambda}.$$

Soit donc (C) la *rhodonée*

$$(26) \quad r = a \sin m\omega;$$

les coordonnées polaires de  $(\Phi_\lambda)$  sont

$$(26') \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{a}{1 + \lambda} \sqrt{\sin^2 m\varphi + m^2 \cos^2 m\varphi}, \\ \varphi = \lambda\omega + \text{arc tang } (m \cot m\omega); \end{array} \right.$$

les coordonnées cartésiennes

$$(26'') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{1 + \lambda} (\cos \lambda\omega \sin m\omega - m \sin \lambda\omega \cos m\omega), \\ y = \frac{a}{1 + \lambda} (\sin \lambda\omega \sin m\omega + m \cos \lambda\omega \cos m\omega). \end{array} \right.$$

Par décomposition des produits de fonctions en sommes, on les reconnaît bien comme celles d'une *épitrochoïde* <sup>(1)</sup>.

Les coordonnées intrinsèques sont :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} s' = \frac{a}{1 + \lambda} \int d\omega \sqrt{(\lambda - 1)^2 m^2 \cos^2 m\omega + (\lambda - m^2)^2 \sin^2 m\omega}, \\ R' = \frac{a}{1 + \lambda} \frac{[(\lambda - 1)^2 m^2 \cos^2 m\omega + (\lambda - m^2)^2 \sin^2 m\omega]^{\frac{3}{2}}}{\left[ \begin{array}{l} (\lambda - 1)^2 m^2 \cos^2 m\omega \\ + (\lambda - m^2) \sin^2 m\omega + (\lambda - 1)(\lambda - m^2) m^2 \end{array} \right]}. \end{array} \right.$$

---

(1) G. LORIA, *loc. cit.* t. I, p. 358. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. II, p. 211.

d'où il résulte :

*Quand on fait rouler sur la trochoïdale*

$$(28) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{1+\lambda}(\lambda \sin m\psi \cos \psi - m \cos m\psi \sin \psi), \\ y = \frac{a}{1+\lambda}(\lambda \sin m\psi \sin \psi + m \cos m\psi \cos \psi), \end{cases}$$

la trochoïdale (27), on aura la rhodonée (26) comme roulette du centre de la base circulaire. Si  $\lambda = 1$ , on aura comme base curviligne et comme profil générateur deux cycloïdales congruentes, représentées par

$$(29) \quad m^2 s^2 + R^2 = \left[ \frac{a(1-m^2)}{2} \right]^2.$$

En faisant de même  $\lambda = m^2$ , on aura comme courbe fixe la cycloïdale

$$(29') \quad m^2 s'^2 + R'^2 = \left[ \frac{a m^2(1-m^2)}{1+m^2} \right]^2,$$

sur laquelle il faut faire rouler la courbe (C'), représentée, suivant les équations (27), par les coordonnées intrinsèques :

$$(30) \quad s'' = \frac{a(1-m^2)m}{1+m^2} \sin m\varphi, \quad R'' = \frac{a(1-m^2)}{1+m^2} \cos m\varphi,$$

ou par l'équation intrinsèque

$$(31) \quad s''^2 + m^2 R''^2 = \left[ \frac{a(1-m^2)m}{1+m^2} \right]^2.$$

Cette courbe (C') est donc une *symétrique intrinsèque* (1) de (29).

(1) L. BRAUDE, *Thèse*, p. 20; inversement, par le roulement des radiales de ces courbes, c'est-à-dire des deux rhodonées  $r = c \sin n\varphi$  et  $r_1 = \frac{c}{n^2} \sin \frac{\varphi}{n}$ , on aura comme roulettes des pôles les cycloïdales correspondantes (voir *Thèse*, p. 50).

EXEMPLES. — *a.* Si  $m = 2$ , on fait rouler sur l'astroïde (1)

$$(32) \quad 4s^2 + R^2 = a^2$$

une courbe congruente, pour avoir comme roulette du centre la rosace à quatre feuilles; en faisant rouler la néphroïde

$$(33) \quad 4s^2 + 16R^2 = a^2,$$

on aura de même cette rosace; en faisant rouler l'astroïde sur la néphroïde, on aura la rosace du module  $\frac{1}{2}$ .

*b.* Quand on fait rouler ( $m = \frac{1}{3}$ ), la *cardioïde*

$$(34) \quad s^2 + 9R^2 = a^2,$$

sur l'*hypocycloïde tricuspidale* (2) (en courbure opposée), on aura comme roulette un *trifolium régulier*; par inversion du roulement, on aura une *rhodonée* du module  $\frac{1}{3}$ , qui est en même temps un *limaçon de Pascal*.

*c.* Sur la *campyle d'Eudoxe* (3) (radiale de la chaînette)

$$\rho = \frac{a}{\sin^2 \varphi},$$

il faut faire rouler la parabole

$$(35) \quad y = a + \frac{x^2}{a}$$

(1) H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 129. — G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 266. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. I, p. 328.

(2) G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 151. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. I, p. 174; — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 142.

(3) G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 383. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 71.

pour engendrer comme roulette de l'origine la courbe de Cappa (radiale de la tractrice) (1)

$$r = \text{tang } \varphi.$$

d. Quand on fait rouler la trochoïde

$$(36) \quad x = r\varphi - h \sin \varphi, \quad y = r - h \cos \varphi$$

sur le limaçon de Pascal

$$(36') \quad \rho = r - h \cos \varphi,$$

de sorte que, suivant le théorème de *Habich*, l'axe des  $x$  passe toujours par le pôle du limaçon (2), on aura comme roulette d'un point immobile sur l'axe des  $x$  la podaire d'une développante du cercle

$$(36'') \quad \rho' = r\varphi - h \sin \varphi.$$

De même quand on fait rouler le limaçon (36') en courbure opposée sur la trochoïde (36), la roulette du pôle est une développante de la cycloïde, pour laquelle (36) est la *développée moyenne* ( $\lambda = 1$ ); le cas spécial  $r = h$  est traité dans notre article cité.

### III.

6. Regardons encore une autre application des *développées intermédiaires* pour engendrer un système de  $\infty^2$  courbes dérivées. Sur la développée intermédiaire ( $\lambda$ ) de la courbe à l'équation intrinsèque

$$(37) \quad (C) \equiv f(R, \varphi) = 0,$$

(1) G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 196. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 74. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. I, p. 274.

(2) H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 308, 311.

faut faire rouler la courbe d'équation polaire

$$(37') \quad (R_\lambda) \equiv f \left[ r(1 + \lambda), \frac{\varphi}{\lambda} \right] = 0,$$

pour avoir (C) comme roulette du pôle (1). C'est la radiale d'une courbe à courbure proportionnelle ( $C_\lambda$ ), dont nous avons appliqué la courbe de Mannheim  $M_\lambda$  dans la première partie de cet article. L'angle polaire de (37') correspondant au point de contact

$$P_\lambda \left( x = 0, y = \frac{R}{1 + \lambda} \right)$$

est égal à  $\lambda\varphi$ ; une droite  $g$  menée par le pôle de (37') forme donc avec la tangente de (C) l'angle  $\lambda\varphi - \alpha$ , où  $\alpha$  est une constante arbitraire, déterminée par le choix de  $g$ . L'équation de  $g$  dans le système (tangente, normale) de (C) est donc (2)

$$(38) \quad g \equiv y - x \operatorname{tang}(\lambda\varphi - \alpha) = 0.$$

Pour avoir les coordonnées  $x, y$  du point de contact, il faut dériver cette équation  $f(x, y, s) = 0$  sous la forme

$$(39) \quad (y - R) \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

la déviation  $\varphi$  étant, suivant l'équation intrinsèque de (C), donnée comme fonction de l'arc  $s$ . On aura donc

$$(40) \quad (y - R) \operatorname{tang}(\lambda\varphi - \alpha) + x \left[ 1 + \frac{\lambda}{\cos^2(\lambda\varphi - \alpha)} \right] = 0;$$

(1) *Thèse*, p. 48.

(2) CESÀRO, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 20 (Napoli, 1906); édition allemande, par G. KOWALEWSKI (Leipzig, Teubner, 1900, p. 21). — H. WIELBITNER, *loc. cit.*, p. 173.



On a discuté cette dérivée comme *causticoïde* de (C) en appliquant l'équation magique

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - f(\varphi) = 0$$

de (C) (1). Si  $\lambda = 1$  on aura la *caustique* proprement dite pour laquelle la construction du point de contact est bien connue (2); si  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , on aura la *catacaustique*; si  $\lambda = 0$  la dérivée est une *développoïde* (3), alors la construction du point P(x, y) est celle de Réaumur.

Nos recherches sur les développées intermédiaires nous font déterminer les courbes, pour lesquelles le rayon de courbure de la causticoïde  $E_{\lambda, \alpha}$  est divisé dans un rapport constant par l'intersection de la normale avec celle de (C); pour ces courbes une certaine développée intermédiaire de (C) est une autre développée intermédiaire de  $E_{\lambda, \alpha}$ .

Par application de la transformation de M. Koestlin (rotation constante de la tangente variable de  $E_{\lambda, \alpha}$  autour de l'intersection avec une autre courbe) (4), cette propriété ne cesse pas d'avoir lieu; ici cette courbe de transformation (axe curviligne) est la courbe (C). Soit donc

$$(1 + \alpha)P_\lambda = \bar{R}$$

ou

$$(46) \quad \frac{R_1 \sin(\lambda\varphi - \alpha)}{(\lambda + 1)^2} + \frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)} R \cos(\lambda\varphi - \alpha) \\ = \frac{\alpha + 1}{\lambda + 1} R \cos(\lambda\varphi - \alpha),$$

(1) NILS GRANE, *Ueber Kurven mit gleichartigen successiven Développoiden*, p. 42 (Thèse, Lund, 1894).

(2) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 303.

(3) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 261. — H. WIELEITNER, p. 177.

(4) E. KOESTLIN, *Mitteilungen des Math. Naturwissenschaftlichen Vereins Wurttemberg*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, 1906, p. 72-99.

d'où il résulte

$$(46') \quad \frac{R_1}{R} = [a(\lambda + 1) - \lambda] \frac{\cos(\lambda\varphi - \alpha)}{\sin(\lambda\varphi - \alpha)}.$$

Comme  $R_1 = \frac{dR}{d\varphi}$ , on aura, par une intégration simple,

$$(47) \quad R' = C \sin^{\frac{a(\lambda+1)-\lambda}{\lambda}} \left( \frac{\lambda}{\lambda+1} \psi \right)$$

comme équation intrinsèque  $(R, \psi)$  de (C). L'arc étant

$$(47') \quad s' = \int R' d\psi,$$

l'équation intrinsèque  $(s', R')$  est

$$(48) \quad s' = \frac{1}{a(\lambda+1)-\lambda} \int \frac{dR'}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^{\frac{-2\lambda}{a(\lambda+1)-\lambda}} - 1}}.$$

C'est donc la même famille de courbes remarquables dont les développées intermédiaires  $(\pm \lambda)$  ont une propriété correspondante (1). Si  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , on aura les courbes de Ribaucour (2); si  $a(1+\lambda) - (1-\lambda) = 0$ , (48) est une *spirale sinusöide* (3); en faisant enfin  $2\lambda - a(\lambda+1) = 0$ , on aura une cycloïdale représentée par

$$R = c \sin(\lambda\varphi - \alpha),$$

la développée intermédiaire correspondante est *la base circulaire*.

(1) *Thèse*, p. 23. — G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 295.

(2) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 295.

(3) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 470. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 134. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. II, p. 259.

Regardons comme courbe (C) la cycloïdale

$$(49) \quad R = \sin m\varphi,$$

alors on aura

$$(50) \quad \begin{aligned} \bar{R} &= \frac{1}{(1+\lambda)^2} [m \cos m\varphi \sin(\lambda\varphi - \alpha) \\ &\quad + (2\lambda + 1) \sin m\varphi \cos(\lambda\varphi - \alpha)] \\ &= \frac{1}{2(1+\lambda)^2} [(m + 2\lambda + 1) \sin[(m + \lambda)\varphi - \alpha] \\ &\quad + (2\lambda + 1 - m) \sin[(m - \lambda)\varphi + \alpha]]. \end{aligned}$$

L'équation intrinsèque est donc

$$(51) \quad \bar{R} = \frac{1}{2(1+\lambda)^2} \left[ (m + 2\lambda + 1) \sin \left( \frac{m + \lambda}{\lambda + 1} \psi - \alpha \right) \right. \\ \left. + (2\lambda + 1 - m) \sin \left( \frac{m - \lambda}{\lambda + 1} \psi + \alpha \right) \right].$$

La causticoïde est, suivant la dénomination de l'abbé Aoust (1), la *résultante* de deux cycloïdales, dont l'extension ne dépend pas de  $\alpha$ ; on l'aura par le roulement de la rhodonée

$$(52) \quad \varphi = \frac{2r(m+1)}{(\lambda+1)(2m+1)} \sin \frac{\omega}{\lambda(2m+1)}$$

correspondant à l'ellipse (19), sur la trochoïdale (18) comme enveloppe d'une droite, menée par le pôle.

Si  $\lambda = \pm m$ , on aura deux développantes d'une cycloïdale, représentées par

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{3m+1}{2(m+1)^2} \sin \left( \frac{2m}{m+1} \psi - \alpha \right) + \frac{\sin \alpha}{2(m+1)} \\ \text{ou} \\ R = \frac{3m-1}{2(m-1)^2} \sin \left( \frac{2m}{m-1} \psi - \alpha \right) + \frac{\sin \alpha}{2(m-1)}; \end{array} \right.$$

(1) Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, p. 53. Paris, Gauthier-Villars, 1873. — P. ERNST, *Die Aoustsche Resultantenkurve* (*Jahresbericht der K. K. Staatsoberrealschule*, XV,

en faisant  $\alpha = 0$ , on aura deux cycloïdales. Pour la *cycloïde* proprement dite ( $m = 1$ ), la dérivée est une autre cycloïde, qui est à la première comme 1 : 2.

Chaque deuxième rebroussement de la dérivée est situé dans un rebroussement de la première courbe (1).

Pour la *néphroïde* (2) ( $m = \frac{1}{2}$ ), on aura, en général, une *astroïde oblique*; elle est régulière

$$(x^2 + y^2 = C^2) \quad \text{si } a = 0;$$

si  $m = \pm \frac{1}{3}$ , les dérivées de la *cardiïde* sont, au premier cas, les développantes d'une *néphroïde*, par exemple une *Cayley-Sextik* (3); au deuxième cas, on aura un cercle dont le centre est le rebroussement réel. Pour l'hypocycloïde tricuspidaie ( $m = 3$ ), la dérivée est une courbe congruente.

De même, si  $2\lambda + 1 \pm m = 0$ , on aura deux autres cycloïdales représentées par

$$(54) \quad R = \frac{4m}{(m+1)^2} \sin\left(\frac{3m-1}{m+1} \psi - \alpha\right),$$

$$(55) \quad R = \frac{4m}{(m-1)^2} \sin\left(\frac{3m+1}{m-1} \psi - \alpha\right).$$

Suivant ce théorème on aura pour la *cycloïde* ( $m = 1$ ) une *cycloïde congruente*; pour l'*hypocycloïde sténiérienne*, on aura une *astroïde droite*; la dérivée de la *cardiïde* est une *circonférence* ou une *hypocycloïde*

Vienne, 1909). — Voir aussi notre article *Rend. Circ. mat. Pal.*, t. XXXIV, 1912 : *Ueber Roll- und Fusspunkturven*.

(1) G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 305.

(2) H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 139. — F.-G. TEIXEIRA, *loc. cit.*, t. II, p. 170.

(3) ARCHIBALD, *Thèse*, p. 13. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 136.

*tricuspidale* <sup>(1)</sup>. En appliquant la transformation (45) à une spirale logarithmique, on aura des courbes transcendantes très intéressantes, qui sont à regarder comme généralisations des *cycloïdales* <sup>(2)</sup>. On les aura, en faisant rouler une certaine spirale logarithmique  $S_1$  sur une autre spirale  $S_2$ , comme enveloppe d'une droite immobile menée par le pôle de  $S_1$ , si les arcs des deux spirales mesurés des deux pôles jusqu'aux points de contact sont égaux. L'équation intrinsèque de ces courbes, que nous appellerons *épilogarithmoïdes* ou *hypologarithmoïdes* suivant que l'équation intrinsèque

$$(56) \quad R = C e^{m\varphi} \sin n\varphi \quad (n \leq 1),$$

nous fait reconnaître comme cas spécial les cycloïdales ( $m = 0$ ), la *logarithmoïde* de M. E. Koestlin ( $n = 1$ ), qui correspond à la cycloïde ( $m = 0, n = 1$ ) et une autre courbe bien intéressante

$$(57) \quad R = C \varphi e^{m\varphi}$$

qui est une généralisation de la développante du cercle. Nous avons mentionné plusieurs générations de ces courbes dans un article <sup>(3)</sup> qui paraîtra bientôt dans les *Annales de l'Académie de Porto* <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> G. LORIA, *loc. cit.*, t. I, p. 151. — H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 142.

<sup>(2)</sup> Elles sont mentionnées par G. LORIA, *loc. cit.*, t. II, p. 260; de même par N. GRANE dans sa Thèse.

<sup>(3)</sup> L. BRAUDE, *Sur quelques généralisations des transformations de M. Koestlin*.

<sup>(4)</sup> Voir de même notre petite œuvre, qui paraîtra bientôt dans la collection *Scientia* (Paris, Gauthier-Villars), intitulée : *Les coordonnées intrinsèques, théorie et applications*.