J. MALAISE

Sur une formule d'approximation d'une fonction de grand nombre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 13 (1913), p. 514-516

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__514_0>

[D1]

SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION D'UNE FONCTION DE GRAND NOMBRE;

PAR M. J. MALAISE.

On doit à Olinde Rodrigues la formule suivante :

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1} \sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x],$$

Il est aisé de l'établir en partant de la formule qui donne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction quelconque de x^2

$$\begin{aligned}\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n} &= (2x)^n\varphi_n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi_{n-1}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2}(2x)^{n-4}\varphi_{n-2}(x^2) + \ldots \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n+2p}\varphi_{n-p}(x^2) + \ldots,\end{aligned}$$

où $\varphi_i(x^2)$ désigne la dérivée $i^{\text{ième}}$ de $\varphi(u)$ par rapport à u, dans laquelle on a remplacé u par x^2.

D'autre part, M. Darboux a démontré, dans son célèbre Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, que si

$$f(z) \equiv (z-\alpha)^k\varphi(z) + \psi(z),$$

où k est *fractionnaire*, on peut, pour la recherche du coefficient de z^n, substituer à $f(x)$ l'une des fonctions

$$\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k,$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha)\right](z-\alpha)^k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1}\varphi'(\alpha) + \ldots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!}\varphi_p(\alpha)\right](z-\alpha)^k.$$

L'erreur commise est de l'ordre $\frac{1}{n^p}$.

On a alors pour la valeur a'_n approchée du coefficient de z^n de $f(z)$:

$$(1)\,(^1)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha^{k-n} a'_n = {} & \varphi(\alpha)(-1)^n \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} \\ & + \alpha\,\varphi'(\alpha)(-1)^{n+1} \frac{(k+1)k\ldots(k-n+2)}{n!} \\ & + \alpha^2 \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(-1)^{n+2} \frac{(k+2)\quad\ldots(k-n+3)}{n!} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha^{p-1}(-1)^{n+p-1} \frac{(k+p-1)\ldots(k+p-n)}{n!} \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{(p-1)!}. \end{aligned}\right.$$

Considérons la fonction génératrice

$$[1-(x+t)^2]^{n+\frac{1}{2}},$$

et remarquons que $\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ est le coefficient multiplié par $n!$ de t^n dans le développement de cette fonction.

Supposons que $(1-x)$ et $(1+x)$ aient des modules différents et que $|1-x| < |1+x|$. Il y aura un seul point critique sur le cercle de convergence de la fonction génératrice, à savoir : $1-x$ qui joue ici le rôle de α dans la formule (1). On trouve alors aisément :

$$\begin{aligned} & \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \\ & = (-1)^n \Big[2^{\frac{1}{2}}(2n+1)\ldots 3\,(1-x)^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad - 2^{-\frac{1}{2}}(2n+3)(2n+1)(2n-1)\ldots 5\,\frac{(2n+1)}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ & \qquad + 2^{-\frac{3}{2}}(2n+5)\ldots 7\,\frac{(2n+1)(2n-1)}{2^2}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \ldots \Big]. \end{aligned}$$

---

(1) Cette formule est mal imprimée dans le Mémoire cité

Pour n très grand on a, en se bornant au premier terme,

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{2}\,(2n+1)!}{2n!}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

et si l'on emploie la formule de Stirling :

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}$$
$$= (-1)^n \frac{(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{n^n} \sqrt{2+\frac{1}{n}}\,(1+\varepsilon).$$

En comparant ce résultat avec celui de Olinde Rodrigues, on trouve la formule curieuse où ε tend vers zéro quand n grandit :

$$\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x]$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2n+1)\,n^n} \sqrt{2+\frac{1}{n}}\,(1+\varepsilon).$$