

J. MALAISE

**Sur une formule d'approximation d'une
fonction de grand nombre**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 13
(1913), p. 514-516

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1913_4_13__514_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D1]

**SUR UNE FORMULE D'APPROXIMATION D'UNE FONCTION
DE GRAND NOMBRE;**

PAR M. J. MALAISE.

On doit à Olinde Rodrigues la formule suivante :

$$\frac{d^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{n+1} \sin [(n+1) \arccos x],$$

Il est aisé de l'établir en partant de la formule qui donne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction quelconque de x^2

$$\begin{aligned} \frac{d^n \varphi(x^2)}{dx^n} &= (2x)^n \varphi_n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2} \varphi_{n-1}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} \varphi_{n-2}(x^2) + \dots \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-2p+1)}{p!} (2x)^{n+2p} \varphi_{n-p}(x^2) + \dots, \end{aligned}$$

où $\varphi_i(x^2)$ désigne la dérivée $i^{\text{ième}}$ de $\varphi(u)$ par rapport à u , dans laquelle on a remplacé u par x^2 .

D'autre part, M. Darboux a démontré, dans son célèbre Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, que si

$$f(z) \equiv (z-\alpha)^k \varphi(z) + \psi(z),$$

où k est *fractionnaire*, on peut, pour la recherche du coefficient de z^n , substituer à $f(x)$ l'une des fonctions

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha)(z-\alpha)^k, \\ &\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1} \varphi'(\alpha) \right] (z-\alpha)^k, \\ &\dots \dots \dots \\ &\left[\varphi(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1} \varphi'(\alpha) + \dots + \frac{(z-\alpha)^p}{p!} \varphi_p(\alpha) \right] (z-\alpha)^k. \end{aligned}$$

L'erreur commise est de l'ordre $\frac{1}{n^p}$.

On a alors pour la valeur a'_n approchée du coefficient de z^n de $f(z)$:

$$(1) \left(\begin{aligned} \alpha^{k-n} a'_n = & \quad \varphi(\alpha) (-1)^n \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \\ & + \alpha \varphi'(\alpha) (-1)^{n+1} \frac{(k+1)k\dots(k-n+2)}{n!} \\ & + \alpha^2 \frac{\varphi''(\alpha)}{2!} (-1)^{n+2} \frac{(k+2)\dots(k-n+3)}{n!} \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \alpha^{p-1} (-1)^{n+p-1} \frac{(k+p-1)\dots(k+p-n)}{n!} \frac{\varphi_{p-1}(\alpha)}{(p-1)!} \end{aligned} \right)$$

Considérons la fonction génératrice

$$[1 - (x + t)^2]^{n+\frac{1}{2}},$$

et remarquons que $\frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ est le coefficient multiplié par $n!$ de t^n dans le développement de cette fonction.

Supposons que $(1 - x)$ et $(1 + x)$ aient des modules différents et que $|1 - x| < |1 + x|$. Il y aura un seul point critique sur le cercle de convergence de la fonction génératrice, à savoir : $1 - x$ qui joue ici le rôle de α dans la formule (1). On trouve alors aisément :

$$\begin{aligned} & \frac{d^n (1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \\ & = (-1)^n \left[2^{\frac{1}{2}} (2n+1) \dots 3 (1-x)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad - 2^{-\frac{1}{2}} (2n+3) (2n+1) (2n-1) \dots \frac{(2n+1)}{2} (1-x)^{\frac{3}{2}} \\ & \quad \left. + 2^{-\frac{3}{2}} (2n+5) \dots 7 \frac{(2n+1)(2n-1)}{2^2} (1-x)^{\frac{5}{2}} - \dots \right]. \end{aligned}$$

(¹) Cette formule est mal imprimée dans le Mémoire cité

Pour n très grand on a, en se bornant au premier terme,

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{2} (2n+1)!}{2n!} (1-x)^{\frac{1}{2}},$$

et si l'on emploie la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \\ = (-1)^n \frac{(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)} (1-x)^{\frac{1}{2}}}{n^n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}} (1+\varepsilon). \end{aligned}$$

En comparant ce résultat avec celui de Olinde Rodrigues, on trouve la formule curieuse où ε tend vers zéro quand n grandit :

$$\begin{aligned} \sin [(n+1) \arccos x] \\ = \frac{(n+1)(2n+1)^{2n+1} e^{-(n+1)} (1-x)^{\frac{1}{2}}}{1.3.5 \dots (2n+1) n^n} \sqrt{2 + \frac{1}{n}} (1+\varepsilon). \end{aligned}$$