NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MYLLER

Sur les courbes qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation quadratique involutive

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 126-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__126_1>

[P¹4b]

SUR LES COURBES QUI DEMEURENT INVARIABLES QUAND ON LES SOUMET A UNE TRANSFORMATION QUADRATIQUE INVOLUTIVE;

PAR M. A. MYLLER.

On sait qu'il y a seulement deux transformations quadratiques involutives qu'on peut représenter en coordonnées trilinéaires par les formules

$$x' : y' : z' = \frac{1}{y} : \frac{1}{x} : \frac{k}{z} \tag{1}$$

et

$$x' : y' : z' = \frac{a}{x} : \frac{b}{y} : \frac{c}{z}. \tag{2}$$

Les courbes qui demeurent invariables par la transformation (1) sont connues. Elles ont été étudiées ([1]) spécialement dans le cas où deux des sommets du triangle de référence sont situés dans les points circu-

([1]) G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

laires à l'infini. Ces courbes sont appelées *analagmatiques.*

Je m'occuperai, dans ce qui suit, des courbes qui demeurent invariables quand on les soumet à la transformation (2).

Considérons une droite quelconque

$$(3) \qquad uX + vY + wZ = 0.$$

Sur cette droite, se trouvent seulement deux points M, M' qui se correspondent par la transformation (2). Si x, y, z sont les coordonnées d'un de ces points M, les coordonnées du point M' sont $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$, $\frac{c}{z}$ et les coefficients de la droite (3) qui les réunit sont donnés en fonction de x, y, z par les formules

$$(4) \qquad \frac{u}{\frac{x}{a}\left(\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}\right)} = \frac{v}{\frac{y}{b}\left(\frac{z^2}{c}-\frac{x^2}{a}\right)} = \frac{w}{\frac{z}{c}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right)}.$$

Faisons tourner la droite (3) autour d'un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0). Les points M et M' décriront alors une courbe dont on obtient l'équation en remplaçant dans (3) X, Y, Z par x_0, y_0, z_0 et u, v, w par les valeurs obtenues des formules (4). Cette équation est

$$(5) \quad \frac{xx_0}{a}\left(\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}\right) + \frac{yy_0}{b}\left(\frac{z^2}{c}-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{zz_0}{c}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right) = 0.$$

Elle représente une cubique qu'on pourrait considérer comme la plus simple des courbes qui se changent en elles-mêmes par la transformation (2). Cette cubique est complètement déterminée par les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point M_0 que nous nommerons *point caractéristique.* Elle passe par les points doubles de la transformation

$$(6) \qquad \begin{cases} (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), & (-\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), \\ (\sqrt{a}, -\sqrt{b}, \sqrt{c}), & (\sqrt{a}, \sqrt{b}, -\sqrt{c}), \end{cases}$$

par les sommets du triangle de référence

$$(7) \qquad (1, 0' 0), \qquad (0, 1, 0), \qquad (0, 0, 1).$$

et par le point (x_0, y_0, z_0). Les tangentes aux quatre premiers de ces points se rencontrent au point caractéristique et les tangentes aux quatre derniers au point transformé du point caractéristique.

Prenons deux courbes du système (5) avec les points caractéristiques $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ et $M_1 (x_1, y_1, z_1)$. Ces cubiques se rencontrent en dehors des sept points (6) et (7) qui sont communs à toutes les cubiques du système (5) encore en deux points M et M'. La droite $M_0 M_1$, qui réunit les points caractéristiques des deux courbes, passe par les points de rencontre M et M'.

Laissons maintenant le point caractéristique décrire une courbe (K) que nous nommerons de même *courbe caractéristique*. La cubique correspondante enveloppera alors une courbe (C). Cette courbe (C), étant formée par les intersections successives des cubiques (5), possède comme elles la propriété de demeurer invariable quand on la soumet à la transformation (2). La droite qui réunit deux points correspondants M et M' sur la courbe (C) est tangente à (K). En effet, les points M et M' étant à l'intersection des deux cubiques infiniment voisines; la droite qui les réunit passe par les deux points caractéristiques infiniment voisins, c'est-à-dire qu'elle est tangente à (K).

Inversement, étant donnée une courbe (C), qui a la propriété de rester invariable par la transformation (2), la droite qui réunit deux points correspondants enveloppe une courbe caractéristique (K). La courbe donnée (C) peut être envisagée comme enveloppée par une cubique (5) dont le point caractéristique décrit la courbe caractéristique (K).

Soit

$$(8) \qquad \varphi(u, v, w) = 0$$

l'équation tangentielle de la courbe caractéristique (K). On obtient alors l'équation de la courbe (C) invariable par la transformation (2) en éliminant u, v, w entre (4) et (8). Cette équation est

$$(9) \quad \varphi\left[\frac{x}{a}\left(\frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c}\right), \ \frac{y}{b}\left(\frac{z^2}{c} - \frac{x^2}{a}\right), \ \frac{z}{c}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\right] = 0.$$

En imaginant une tangente roulant sur la courbe caractéristique (K) et portant sur elle les deux points mobiles M et M′ qui décrivent la courbe (C), on peut constater les relations suivantes entre les courbes (C) et (K) :

1° A chaque tangente double de (K) correspondent deux points doubles de (C). Ce sont les deux points qui se correspondent par la transformation (2) et qui sont situés sur cette tangente.

2° A chaque point d'inflexion de (K) correspondent deux points de rebroussement de (C) situés sur les tangentes stationnaires.

3° Les points doubles (6) de la transformation sont points multiples de (C) d'un ordre égal à la classe de la courbe (K). Les tangentes dans ces points multiples sont les tangentes menées par ces points à la courbe (K).

Dans un cas spécial, où deux des sommets du triangle de référence sont situés dans les points circulaires à l'infini. la transformation (2) prend la forme

$$(10) \qquad x' = k\,\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad y = -k\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

C'est une inversion suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x. Elle constitue ensemble avec l'inversion simple la *corrélation circulaire* de Möbius ([1]) caractérisée par la propriété de transformer chaque cercle dans un autre cercle.

Les courbes invariables par la transformation (10) ont une équation de la forme

$$\varphi\left(-\frac{x^2+y^2+k}{2kx}, \quad \frac{x^2+y^2-k}{2ky}\right) = 0.$$

Parmi ces courbes se trouve la cubique

$$(xy_0 - yx_0)(x^2+y^2) + 2kxy - k(xy_0 + yx_0) = 0,$$

qui correspond à la cubique (5).