Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 135-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__135_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Énoncer les principaux théorèmes relatifs aux séries à termes positifs.*

2° *Démontrer le théorème basé sur l'étude du rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3° *Indiquer la marche à suivre pour le calcul approché* *d'une série. Application : Calculer à $\frac{1}{100000}$ près la valeur de la série $u_n = \frac{1}{(n!)^4}$.*

Calcul. — *On donne la courbe $y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$. La construire. Évaluer la longueur d'un arc, l'aire comprise entre une boucle et l'axe des x, les coordonnées du centre de gravité, le volume engendré par l'aire d'une boucle tournant autour de Ox.*

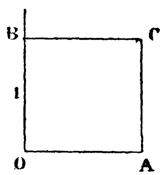
Épreuve pratique. — 1° *Intégrer*

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

2° *L'expression*

$$du = 2x\frac{e^y - e^{-y}}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{x^2 e^y - e^{-y}}{x^2+1}\,dy$$

est-elle une différentielle exacte ?



L'intégrer suivant OAC, *suivant* OBC.

(Juin 1911.)

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer l'équation linéaire à coefficients constants*

$$\frac{d^2y}{dx} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x.$$

2° *Déterminer les constantes d'intégration de façon que la courbe $y = f(x)$ passe par l'origine des coordonnées et soit tangente en ce point à Ox.*

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe ainsi déterminée, l'axe des x et les abscisses* 0 *et* 1.

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$
$$+(x^2-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

définissant une fonction z de x et y.

On fait le changement de variables

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi,$$

en prenant ρ et φ comme nouvelles variables indépendantes.

Intégrer l'équation transformée. Donner l'intégrale de l'équation primitive.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Appliquer la méthode des parties proportionnelles, puis la méthode de Newton au calcul approché des racines de l'équation*

$$z^4-z+1=0.$$

(Novembre 1911.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Expliquer sur l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=e^{ax}$$

la méthode d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Donner l'intégrale générale.

2° *Cas où $a=2$.*

3° *Dans le cas où $a\neq 2$ ou 3, en considérant cette intégrale comme l'équation d'une courbe, déterminer les constantes arbitraires de façon que la courbe passe par l'origine et soit tangente en ce point à Ox.*

4° *En supposant $a=4$, déterminer les points d'inflexion de cette courbe.*

5° *Construire cette courbe. Calculer la fraction de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x, dans la* région *négative des abscisses.*

(Novembre 1912.)

Besançon.

Épreuve théorique. — Cours. — *Maxima et minima de la fonction*

$$u = \frac{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

à l'égard des trois variables indépendantes x, y et z; application à la démonstration de la réalité des racines de l'équation en S.

Problèmes. — I. *Condition pour qu'un cône du second degré admette un système de trois génératrices perpendiculaires deux à deux.*

II. *Transformer et intégrer l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

par le changement de variables

$$\xi = x + at,$$
$$\zeta = x - at.$$

III. *Déterminer la fonction de n variables indépendantes* $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ *qui, étant de la forme*

$$F(r); \qquad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

satisfait identiquement à l'équation

$$\frac{d^2 F}{dx_1^2} + \frac{d^2 F}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 F}{dx_n^2} = 0.$$

Cas particuliers de $n = 2$ *et de* $n = 3$.

Épreuve pratique. — *Quelles sont les surfaces représentées par l'équation*

$$-9ax^2 + (8 - a)y^2 - 2xy(3a + 4) - z^2 - 2yz - 22x = 0$$

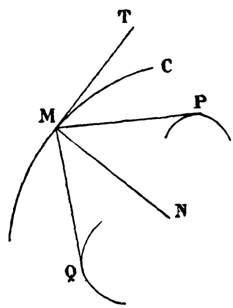
pour les diverses valeurs de a?

(Juin 1912.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Démontrer que toute courbe, pour laquelle le rayon de courbure reste constant quand on se déplace le long de la courbe, est un cercle.*

II. *Soient* C *une courbe,* M *un point quelconque pris sur la courbe,* MN *la normale. On considère un angle droit*



QMP *dont la bissectrice est la normale* MN. *Lorsque* M *varie, les droites* MP *et* MQ *ont chacune une enveloppe.*

1° *Démontrer que les points* P, Q, *où les droites* MP, MQ *touchent respectivement leurs enveloppes, sont à égale distance du point* M.

2° *Quelle doit être la courbe* C *pour que les distances égales* MP, MQ *restent constantes lorsque le point* M *se déplace sur la courbe* C.

Épreuve pratique. — *On considère l'ellipse* ABA′B′ *qu'on suppose représenter une méridienne de la surface terrestre,* B′B *étant la ligne des pôles. L'équation de cette ellipse dans le système d'axes rectangulaires* Ox, Oy *sera*

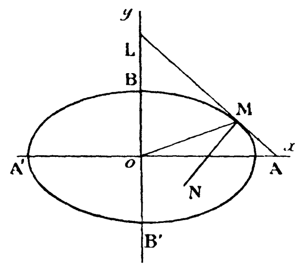
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et l'on donne

$$a = 6378^{\text{km}}, \qquad b = 6356^{\text{km}}.$$

Si M *est un point quelconque de la portion* AB *de l'ellipse,* ML *la tangente en* M *qui fait avec* Oy *un angle* φ

égal à la latitude *du point* M, *la verticale apparente* MN *est la normale en* M *à l'ellipse. Cette verticale fait avec*



OM *un angle* Σ *variable avec* φ. *On demande de calculer, à* $1'$ *près, la latitude pour laquelle* Σ *est maximum et, à* $1''$ *près, la valeur de ce maximum.*

(Novembre 1911.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \quad (1+x^2)y' + 2xy - 2x\sin x - (1+x^2)\cos x = 0.$$

2° *Déduire du résultat trouvé l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(2) \quad (1+x^2)y'' + 2xy' - 2x\sin x - (1+x^2)\cos x = 0.$$

3° *Quelle est l'intégrale particulière de l'équation* (2) *qui s'annule en même temps que sa dérivée pour* $x = 0$?

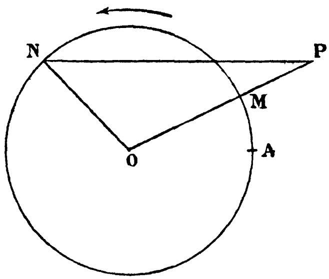
II. *Un point* M, *primitivement en* A, *décrit la circonférence de centre* O *et de rayon* OA = R *dans le sens de la flèche. On porte sur* OM, *dans le sens du vecteur* $\overline{\mathrm{OM}}$, *un segment* $\overline{\mathrm{MP}}$ *de longueur égale à celle de l'arc* AM.

1° *Construire le lieu géométrique* C *du point* P.

2° *Montrer que la normale à la courbe* C *au point* P *passe par le point* N *de la circonférence, tel que l'angle* MON *soit égal à un angle droit.*

3° *Évaluer la longueur de l'arc décrit par le point* P *quand le point* M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s.*

4° *Évaluer l'aire balayée par le segment* MP *quand le*



point M *a décrit sur la circonférence un arc de longueur s. Cas particulier où* $s = 2\pi R$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Appliquer le développement en série de* e^x *au calcul de* $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ *avec trois décimales.*

II. *Montrer que l'équation*

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

a une seule racine réelle, et calculer cette racine avec deux décimales.

(Novembre 1911.)