NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. BRAUDE

Sur les glissettes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 166-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__166_1>

[O[1]2q]

SUR LES GLISSETTES;

Par M. L. BRAUDE,
à Bierstadt-Wiesbaden.

1. Dans une lettre adressée à M. Haton de la Goupillière et publiée au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1913, p. 165-170, M. F.-G.

Teixeira a traité un exemple concernant les *glissettes d'une courbe par rapport à une droite fixe*. On aura cette courbe associée en faisant glisser une courbe sur une droite, de sorte qu'elle soit toujours tangente au même point.

Ces courbes ont été mentionnées et illustrées de quelques exemples par W.-H. Besant (*Notes on Roulettes and Glissettes*, Cambridge, 1890).

En rapportant la courbe glissante (C) à un système rectangulaire ayant pour axe des x la tangente fixe, et pour axe des y la normale de (C) dans le point de contact, les coordonnées du point $P(x, y)$ de la glissette sont

$$x = \rho \cos v, \qquad y = \rho \sin v, \tag{1}$$

v désignant l'angle entre la tangente de (C) et le rayon vecteur de P. On a donc

$$\operatorname{tang} v = \frac{d\rho}{\rho\, d\theta} = \frac{\rho'}{\rho},$$

et les coordonnées cartésiennes sont

$$x = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \tag{2}$$

Les coordonnées polaires de (C) sont donc

$$r = \rho, \qquad v = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho'}{\rho}. \tag{3}$$

M. F.-G. Teixeira a traité la glissette d'une *épi- ou hypocycloïde*. En la représentant par

$$\left\{\begin{aligned} x &= (\mathrm{R} + r)\cos\varphi - r\cos\frac{\mathrm{R}+r}{r}\varphi, \\ y &= (\mathrm{R} + r)\sin\varphi - r\sin\frac{\mathrm{R}+r}{r}\varphi, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

R et r désignant les rayons des cercles mobile et fixe, la glissette du centre du cercle fixe est, suivant le calcul de M. Teixeira, une ellipse représentée par l'équation

$$(5) \qquad x^2 + \left(\frac{R}{R+2r}\right)^2 y^2 = R^2.$$

Du reste, l'équation polaire différentielle

$$(6) \qquad d\theta = \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{R^2-\rho^2}{m^2\rho^2-R^2}},$$

se trouve dans l'œuvre de M. G. Loria (*Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 102, Leipzig, 1911); d'après les équations (2) elle suffit pour représenter les coordonnées de la glissette en fonctions de ρ.

2. De ce théorème on en déduit sans aucun calcul encore un autre, donné par M. Teixeira dans la *Revista da Universidade de Coimbra*, t. XI, 1913. En faisant $\frac{R}{R+2r}$ imaginaire, on aura comme cycloïdale une *para- ou une hypercycloïde;* l'ellipse est remplacée par une hyperbole.

Donc, en faisant glisser une para- ou une hypercycloïde sur une droite, la glissette du centre du cercle fixe est une hyperbole dont les sommets réels se trouvent sur l'axe des y ou sur celui des x.

Pour la *développante du cercle de rayon a*, représentée par

$$(7) \qquad x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \qquad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

ou par l'équation différentielle polaire

$$(8) \qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a\rho}{\sqrt{\rho^2-a^2}},$$

on aura comme glissette du centre de la développée la droite $x = a$.

3. Pour les *spirales sinusoïdes*

$$(9) \qquad \rho^n = a^n \sin n\varphi,$$

la glissette est la *multiplicatrice de Clairaut*

$$r^n = a^n \sin\varphi, \tag{10}$$

suivant la propriété caractéristique des *spirales sinusoïdes*, *représentée par l'équation* $\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho'}{\rho} = n\varphi$.

La glissette de la *cardioïde* $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ est un *biovale* (*Doppeleilinie*), celle de la *cayley-sextic* $\left(n = \frac{1}{3}\right)$ est un *folium* simple (*Einblatt*), etc. Nous avons publié cette génération dans l'œuvre de M. C. de Jans (*Les courbes multiplicatrices de Clairaut*, Gand, 1912, p. 12).

Du reste, nous avions engendré les courbes (10) *comme roulettes à base rectiligne de la développée d'une spirale sinusoïde* [*Ueber Roll- und Fusspunktkurven* (*Rend. Circ. mat. Pal.*, 34, 1912)].

4. Cette double génération des courbes multiplicatrices nous a fait reconnaître le théorème général :

La glissette d'une courbe (C) *par rapport à l'axe des x d'un système rectangulaire est identique à la roulette de la développée de* (C) *par rapport à l'axe des y.*

Soit (C) le profil générateur qu'on fait rouler sur l'axe des x, alors les coordonnées rectangulaires de la roulette d'un point fixe P sont

$$\xi = s - \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}, \qquad \eta = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}, \tag{11}$$

s désignant l'arc de (C) mesuré du point initial P_0 correspondant à l'origine du système. L'angle entre l'axe des x et le rayon vecteur AP est $\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho}{\rho'}$.

Pour avoir la roulette de la développée de (C), il faut regarder (11) comme courbe de Mannheim d'une certaine courbe (Γ), alors la roulette de la développée de (C_1) est la courbe de Mannheim de la développée de (Γ). Si l'équation intrinsèque de (Γ) est

$$f(s, \mathrm{R}) = 0, \tag{12}$$

s désignant l'arc, R le rayon de courbure, les coordonnées intrinsèques de la développée sont

$$s_1 = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{R}_1 = \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{ds}. \tag{13}$$

L'équation cartésienne de la courbe de Mannheim de Γ est

$$f(x, y) = 0, \tag{14}$$

on aura donc l'équation de la courbe de Mannheim de la développée par la représentation paramétrique

$$x_1 = y, \qquad y_1 = \frac{y\,dy}{dx}. \tag{15}$$

En outre, cette courbe est le lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux normales de (14) par rapport à l'axe des x.

5. Nous allons donc appliquer la transformation (15) sur la courbe (11). On aura

$$\tag{16}\left\{\begin{aligned}
x_1 &= y = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}},\\
y_1 &= \frac{y\,dy}{dx} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}\;\frac{2\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\rho\rho' - \rho^2\dfrac{\rho'(\rho+\rho'')}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}}{\rho^2+\rho'^2}\\
&\quad\times\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2} - \dfrac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}(\rho\rho''+\rho'^2) - \rho\rho'^2\dfrac{\rho+\rho''}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}}{\rho^2+\rho'^2}}\\
&= \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho^{\,2}}}.
\end{aligned}\right.$$

En conséquence, la glissette de (C) *est identique à la roulette de la développée de* (C).

Pour les courbes de Ribaucour, le rayon de courbure est proportionnel à la normale; la radiale, lieu des points extrêmes des rayons équipollents aux rayons de courbure, est une multiplicatrice de Clairaut semblable à la roulette de la développée de la spirale sinusoïde.

6. Il y a encore une autre déduction géométrique de notre théorème :

Quand on fait rouler la développée de (C) sur l'axe des y, de sorte que le point $s = 0$ corresponde à l'origine, la développante passe toujours par l'origine ayant pour tangente l'axe des x. *Donc le glissement de* (C) *est identique au roulement de la développée.*

7. *De même, nous faisons glisser la courbe* (C) *représentée par l'équation cartésienne* $y = f(x)$ *sur l'axe des* x, pour déterminer l'enveloppe de l'axe des x. En faisant $\frac{dy}{dx} = \tang\varphi$, l'équation tangentielle de l'enveloppe E est

$$(17) \qquad x \sin\varphi + y \cos\varphi - y = 0$$

ou

$$(18) \qquad E \equiv x \sin\varphi + y \cos\varphi - \int R \sin\varphi \, d\varphi = 0,$$

R désignant le rayon de courbure. La développée de E est représentée par

$$(19) \qquad E_1 \equiv x \cos\varphi - y \sin\varphi - R \sin\varphi = 0$$

ou

$$(19') \qquad E_1 \equiv x \cot\varphi - y - R = 0.$$

On aura donc cette développée E_1 en faisant, sur l'axe des y, $OA = R$ et en menant par le point A une parallèle à la tangente de (C).

Suivant la dénomination de M. E. Koestlin (*voir* la Thèse bien intéressante : *Ueber eine Deutung der Gleichung, die Zwischen dem Bogen und dem Neigungswinkel der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht*, Tubingue, 1907), la développée de l'enveloppe E est l'*arcuïde* de la développée de (C). En faisant glisser la courbe $y = f(x) + c$, on aura comme enveloppe une courbe parallèle à (C); mais par le glissement d'une *courbe parallèle*, la courbe E est déplacée le long de l'axe des y. Quand on cherche l'enveloppe d'une droite g_1 qui coupe l'axe des x au point P en formant l'angle α, l'enveloppe des droites g_1 est une *transformée générale de Koestlin*. On l'aura comme enveloppe des droites, menées par une intersection de g_1 et la glissette du point P, formant l'angle α avec g_1. [*Voir* notre article : *Sur quelques généralisations de la transformation de M. E. Koestlin* (*Annales de l'Académie de Porto*, t. IX, 1914, p. 21).]

8. *Exemples*. — *a*. Quand on fait glisser la développante du cercle sur l'axe des x (*voir* n° 2) l'enveloppe d'une droite quelconque menée par le centre du cercle fixe est une cycloïde. Toutes ces cycloïdes ont comme tangentes aux sommets la glissette du centre, c'est-à-dire la parallèle à l'axe des y; enfin, comme la développante du cercle est transformée dans une courbe parallèle par une rotation autour du centre du cercle, *les transformées koestliniennes d'une cycloïde par rapport à la tangente aux sommets sont congruentes entre elles*. {*Voir* E. Koestlin, *Ueber*

eine Transformation ebener Kurven [*Mitt. Math. Nat. Verein Württenberg*, (2), 8, 1906, p. 71]; H. WIELEITNER, *Spez. eb. Kurven*, Leipzig, 1908, p. 387.}

b. L'arcuïde d'une cycloïde étant une astroïde, il résulte que :

Quand on fait glisser une cycloïde sur une droite ($y = 0$), *l'enveloppe de la base rectiligne est une astroïde droite dont les rebroussements se trouvent sur les droites* $y \pm x = 0$; *l'enveloppe d'une tangente aux sommets est une astroïde à un point autotangentiel nommée « croix de Malte »*.

c. L'arcuïde d'une astroïde oblique est une hypocycloïde tricuspidale; de là on déduit :

Quand on fait glisser une astroïde oblique ou droite sur une droite, l'enveloppe d'une droite parallèle à une tangente double de la glissante est une hypocycloïde de Steiner.

d. La spirale logarithmique est congruente à la développée, d'où il résulte que :

Quand on fait glisser une spirale logarithmique ou une développante de la spirale sur l'axe des x, l'enveloppe d'une droite menée par le pôle (ou par le centre du cercle asymptotique) est une logarithmoïde, représentée par l'équation intrinsèque

$$R = ae^{m\varphi} \cos \varphi.$$

La glissette du pôle est la droite sur laquelle il faudrait faire *rouler* la spirale, pour avoir la logarithmoïde comme enveloppe de la droite menée par le pôle. Quant à la logarithmoïde, *voir* H. WIELEITNER, *loc. cit.*, p. 386; E. KOESTLIN, *Ueber eine transzendente*

Kurve, von der die Zykloide ein Grenzfall ist [*Mitt. Math. Nat. Verein Württenberg*, (2), 9, 1907, p. 21] ou enfin notre article mentionné à la fin du n° 7.