Nouvelles annales de mathématiques

Sur les nombres qui sont sommes de deux carrés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 16-18

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__16_0>

[I 13 b α]

SUR LES NOMBRES QUI SONT SOMMES DE DEUX CARRÉS;

Par un Anonyme.

Cette Note est relative à un fait bien connu, mais la distinction établie ici entre deux cas n'a peut-être pas été remarquée.

1. Un nombre naturel A est triangulaire si l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} = A, \qquad x^2 + x - 2A = 0,$$

a ses racines entières; a et a' étant ces racines, on a

$$a + a' = -1;$$

l'une étant a, l'autre est $-(a+1)$. Si a est la racine positive ou nulle, le nombre a est la *base* du nombre triangulaire

$$\frac{a(a+1)}{2},$$

bien que ce nombre puisse encore s'écrire

$$\frac{-(a+1)x-a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

on ne dit pas que le nombre négatif $-(a+1)$ est une base du nombre triangulaire considéré; de cette façon, on peut parler de la parité de la base d'un nombre triangulaire.

Ainsi, quand un nombre triangulaire se présente sous la forme $\frac{a(a+1)}{2}$, a étant négatif, il faut le mettre sous la forme

$$\frac{-(a+1)x-a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a'(a'+1)}{2},$$

et sa base est le nombre positif ou nul $a' = -(a+1)$.

Nous considérons zéro comme un nombre triangulaire de base zéro.

2. Soit N un nombre impair qui est somme de deux carrés,

$$N = a^2 + b^2 = (2h+1)^2 + (2k)^2.$$

Comme on a simultanément

$$N = a^2 + b^2, \qquad 2N = (a+b)^2 + (a-b)^2,$$

on peut écrire

$$2N = (2h+2k+1)^2 + (2h-2k+1)^2.$$

Si l'on pose

$$h+k = c, \qquad h-k = d,$$

de sorte que c et d sont deux nombres de même parité, on obtient

$$2N = (2c+1)^2 + (2d+1)^2,$$

$$2(N-1) = (4c^2+4c) + (4d^2+4d),$$

$$N = 4\left[\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2}\right] + 1.$$

Ainsi, dans l'égalité

$$N = 4n+1,$$

qui a lieu *a priori*, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d(d+1)}{2},$$

c et d étant de même parité. Mais d peut être négatif, et deux cas se présentent :

1° *Dans l'égalité* $N = a^2 + b^2$, *celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus grand;* on a

$$2h + 1 > 2k, \qquad 2h \geqq 2k, \qquad d \geqq 0;$$

alors, dans la formule $N = 4n + 1$, *le nombre n est la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d sont de même parité;* pour $h = k$, n est le nombre triangulaire de base $2k$ (l'autre nombre triangulaire étant 0).

2° *Dans l'égalité* $N = a^2 + b^2$, *celui des deux nombres a et b qui est impair est le plus petit;* on a

$$2h + 1 < 2k, \qquad 2h + 2 \leqq 2k, \qquad d \leqq -1;$$

en posant $d' = -(d + 1)$, n est de la forme

$$\frac{c(c+1)}{2} + \frac{d'(d'+1)}{2},$$

de sorte que n est alors la somme de deux nombres triangulaires dont les bases c et d' sont de parités différentes; pour $h = k - 1$, n est le nombre triangulaire de base $2k - 1$ (l'autre nombre triangulaire étant 0).

Exemples :

$$29 = 5^2 + 2^2 = 4 \times 7 + 1, \qquad 7 = \frac{3 \times 4}{2} + \frac{1 \times 2}{2},$$

$$17 = 1^2 + 4^2 = 4 \times 4 + 1, \qquad 4 = \frac{2 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2}.$$