NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. FRANÇOIS

Sur une certaine classe de courbes et de surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 241-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__241_0>

[P¹2a]

SUR UNE CERTAINE CLASSE DE COURBES ET DE SURFACES;

PAR M. CH. FRANÇOIS.

1. Proposons-nous de déterminer les surfaces jouissant de la propriété suivante : *En un point quelconque* M (x, y, z) *de la surface, menons le plan tangent* μ, *qui intercepte sur les axes coordonnés* Ox, Oy, Oz, *des longueurs* $OA = \xi$, $OB = \eta$, $OC = \zeta$, *telles qu'on ait*

$$\frac{\xi}{x} = a_1, \qquad \frac{\eta}{y} = b_1, \qquad \frac{\zeta}{z} = c_1, \tag{1}$$

a_1, b_1, c_1 *étant des constantes.* Celles-ci doivent vérifier la relation

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1} = 1,$$

car les coordonnées du point M satisfont à l'équation du plan μ, qui est

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 1.$$

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface cherchée. Celle du plan μ est

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0,$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes; on en déduit

$$\xi = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_x}, \qquad \eta = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_y}, \qquad \zeta = \frac{\Sigma x F'_x}{F'_z};$$

d'où

$$F'_x = \frac{\Sigma x F'_x}{a_1 x}, \qquad F'_y = \frac{\Sigma x F'_x}{b_1 y}, \qquad F'_z = \frac{\Sigma x F'_x}{c_1 z}.$$

Substituons ces valeurs de F'_x, F'_y, F'_z dans l'équation

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{a_1 x} + \frac{dy}{b_1 y} + \frac{dz}{c_1 z} = 0:$$

en intégrant, il vient

$$\frac{1}{a_1}\,lx + \frac{1}{b_1}\,ly + \frac{1}{c_1}\,lz = lm.$$

m étant une constante.

L'équation de la surface cherchée est donc

$$x^{\frac{1}{a_1}}\,y^{\frac{1}{b_1}}\,z^{\frac{1}{c_1}} = m,$$

pour laquelle nous mettrons encore

$$(2) \qquad x^a y^b z^c = m,$$

en représentant par a, b, c les quantités $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{c_1}$. Nous aurons maintenant la relation constante

$$a + b + c = 1.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (2), même lorsque $a + b + c \neq 1$, à condition que cette expression ne soit pas nulle, représente une surface telle que les rapports entre les coordonnées à l'origine d'un plan tangent quelconque aux coordonnées correspondantes du point de contact sont égaux à $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$. On est ramené au cas précédent en remarquant que si $a + b + c = K \neq 0$, on peut écrire, au lieu de $x^a y^b z^c = m$, l'équation $x^{\frac{a}{K}} y^{\frac{b}{K}} z^{\frac{c}{K}} = m^{\frac{1}{K}}$, de telle sorte que la somme des exposants est maintenant égale à l'unité.

2. Considérons l'ensemble des valeurs rationnelles de a, b, c satisfaisant à la relation $a+b+c=1$. Celle-ci ne peut être vérifiée en nombres entiers qu'en attribuant à l'un au moins de ses termes des valeurs négatives. Généralement a, b, c seront donnés sous forme de fractions irréductibles et l'on pourra écrire

$$a=\frac{\alpha}{\lambda}, \qquad b=\frac{\beta}{\mu}, \qquad c=\frac{\gamma}{\nu},$$

les deux termes de ces fractions étant des entiers quelconques, mais satisfaisant à $\Sigma\frac{\alpha}{\lambda}=1$. Pour tout dénominateur pair, la variable correspondante sera affectée d'un double signe.

Si λ, μ, ν sont impairs, les deux surfaces représentées par $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont distinctes et symétriques par rapport à l'origine.

Soit n le plus petit commun multiple de λ, μ, ν et posons

$$\frac{\alpha}{\lambda}=\frac{r_1}{n}, \qquad \frac{\beta}{\mu}=\frac{r_2}{n}, \qquad \frac{\gamma}{\nu}=\frac{r_3}{n}.$$

On a aussi $\Sigma r = n$. Si n est pair, le nombre des quantités r impaires sera égal à 0 ou à 2. Ce nombre ne sera toutefois pas égal à zéro, car on vérifie que, dans ce cas, n n'est pas le plus petit commun multiple des quantités λ, μ, ν, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc deux des quantités r et deux seulement seront impaires; la troisième sera nécessairement paire. Supposons que r_1 et r_2 soient les numérateurs impairs; il est clair que λ et μ seront pairs et contiendront 2 le même nombre de fois en facteur. Quant au dénominateur ν, il pourra être pair ou impair. Il s'ensuit qu'il ne pourra y avoir que 0, 2 ou 3 doubles signes.

Si λ et μ sont pairs et ν impair, nous écrirons la formule fondamentale $x^a y^b z^c = m$ sous la forme

$$(\pm \sqrt[k]{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}}) z^c = m,$$

avec

(3) $\lambda = kh, \quad \mu = kl, \quad k = 2^u, \quad \alpha_1 = \alpha : h, \quad \beta_1 = \beta : l$

u étant un entier positif et h, l des entiers impairs et positifs. On voit que x et y pourront prendre simultanément des valeurs positives ou négatives. Si m est positif, on devra combiner ensemble des valeurs de même signe du radical et de z^c; si m est négatif, on combinera ensemble des valeurs du radical et de z^c de signe contraire. En particulier, si γ est pair, le radical sera de même signe que m. Dans tous les cas, les surfaces définies par $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont identiques.

Si λ, μ, ν sont pairs, nous écrirons

$$(\pm \sqrt[k]{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}})(\pm \sqrt[t]{z^{\gamma_1}}) = m,$$

en posant les relations (3) et en outre

$$\nu = tb, \qquad t = 2^v, \qquad \gamma_1 = \gamma : b,$$

v étant un entier positif et b un entier impair et positif; γ est d'ailleurs, dans le cas considéré, toujours impair. Le premier membre de l'équation précédente sera réel, dans tous les cas suivants : 1° $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$; 2° $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$; 3° $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$; 4° $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$. On voit aussi que les deux expressions $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ définissent la même surface.

Nous arrivons finalement à cet énoncé : Si n est impair, les deux surfaces d'équations $x^a y^b z^c = m$ et $x^a y^b z^c = -m$ sont distinctes; si n est pair, elles sont identiques.

3. Désignons les surfaces (2) par la lettre S. Lorsque m varie, les surfaces S qu'on obtient sont coupées par une droite menée par l'origine O, en des points tels que les plans tangents correspondants sont parallèles. Cette propriété résulte immédiatement de la définition de ces surfaces.

Les formules (1) admettent l'interprétation suivante :

Le point de contact M *d'un plan tangent est le centre de gravité des masses* $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{c_1}$, *attachées aux points où ce plan rencontre les axes.*

A un plan μ dont les coordonnées à l'origine sont ξ, η, ζ, faisons correspondre le point N de coordonnées ξ, η, ζ; nous dirons que le point N est le transformé crucial du plan μ, que le plan μ est le transformé souscrucial du point N (¹).

Si le plan μ touche la surface S au point M (x, y, z), les points M et N sont liés par les formules (1) qu'on peut écrire

$$(4) \qquad x = a\xi, \qquad y = b\eta, \qquad z = c\zeta.$$

On voit que les points M, N se correspondent dans une *transformation affine.*

La surface $x^a y^b z^c = m$, où l'on suppose $a + b + c = 1$, se change, par cette transformation, en la surface

$$\xi^a \eta^b \zeta^c = \frac{m}{a^a b^b c^c}.$$

Ce résultat pourrait s'énoncer ainsi : Les surfaces comprises dans l'équation $x^a y^b z^c = m$, où a, b, c sont

(¹) *Voir*, pour la transformation cruciale, nos Mémoires : *Sur une certaine transformation et son inverse* (*Mathesis*, octobre 1909); *Étude sur la transformation cruciale* (*Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3ᵉ série, t. IX, 1910).

fixes et m variable, forment un *groupe* relativement à la transformation (4) appliquée plusieurs fois de suite. Car la $r^{\text{ième}}$ transformée a pour équation

$$(5) \qquad \xi^a \eta^b \zeta^c = \frac{m}{(a^a b^b c^c)^r}.$$

Considérons deux cas particuliers remarquables :

1° La *surface asymptote* $xyz = m$

$$\left(\text{ou } x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{1}{3}}\right)$$

a pour $r^{\text{ième}}$ transformée affine $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = m^{\frac{1}{3}} 3^r$. M est le centre des médianes du triangle ABC; le $r^{\text{ième}}$ transformé de M a pour coordonnées $3^r x$, $3^r y$, $3^r z$; M et ses transformés successifs sont donc situés sur une même droite passant par l'origine.

2° L'équation $xyz^{-1} = m$ représente un paraboloïde hyperbolique. La première transformée de cette quadrique a pour équation $xyz^{-1} = -m$; elle est symétrique de la surface primitive par rapport à l'origine. La seconde transformée coïncide avec la surface primitive et ainsi de suite.

4. L'équation du plan tangent μ au point $M(x, y, z)$ de la surface $x^a y^b z^c = m$, est, si $a + b + c = 1$,

$$(6) \qquad \frac{aX}{x} + \frac{bY}{y} + \frac{cZ}{z} = 1.$$

Si ce plan doit passer par un point donné P (X, Y, Z), l'équation précédente, où x, y, z sont des coordonnées courantes, représente, une surface cubique, lieu des points de contact des plans tangents menés par P aux surfaces S contenues dans l'équation $x^a y^b z^c = m$, où m est un paramètre variable.

Le lieu des points de contact des plans tangents, menés par P à une même surface de ce système, est la courbe représentée par les deux équations

$$x^a y^b z^c = m, \qquad \frac{aX}{x} + \frac{bY}{y} + \frac{cZ}{z} = 1.$$

En appliquant ces considérations à la surface asymptote, on voit que la courbe de contact du cône circonscrit de sommet P(X, Y, Z) est représentée par les équations

$$xyz = m, \qquad \frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3,$$

dont la dernière, simplifiée au moyen de la précédente, donne $\Sigma Xyz = 3m$. Cette courbe est donc située sur un hyperboloïde et les axes coordonnés sont des génératrices du cône asymptote.

5. Soit à déterminer la trajectoire orthogonale de l'ensemble des surfaces $x^a y^b z^c = m$, où m est variable. On a les équations

$$\frac{x\,dx}{a} = \frac{y\,dy}{b} = \frac{z\,dz}{c},$$

qui, intégrées, donnent

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a} = \frac{z^2}{b} + A, \qquad \frac{y^2}{b} = \frac{z^2}{c} + B.$$

A et B sont deux constantes arbitraires. Les équations (7) définissent deux cylindres du second degré; leur intersection est donc une quartique. Si $A = B = 0$, les équations intégrales sont

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \pm \frac{y}{\sqrt{b}} = \pm \frac{z}{\sqrt{c}};$$

elles représentent quatre droites réelles passant par l'origine, si a, b et c sont de même signe; l'origine correspond à $m = 0$ ou $m = \infty$ suivant les signes de a, b, c.

Si m est fixe et que, c étant donné, b est le paramètre variable et a une fonction donnée de b, $a = \varphi(b)$, la trajectoire sera définie par

$$(8) \qquad \frac{x\,dx}{\varphi(b)} = \frac{y\,dy}{b} = \frac{z\,dz}{c}.$$

6. Reprenons la relation $x^a y^b z^c = m$. Supposons d'abord que l'un des exposants soit nul. La surface correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à un axe coordonné. Si $a + b + c = 0$, l'équation $x^a y^b = m z^{a+b}$ représente un cône de sommet O. Dans l'un et l'autre cas, le point de contact d'un plan tangent est indéterminé. Dans ce qui suit, nous écarterons ces deux cas exceptionnels.

L'intersection de deux surfaces S, données par $x^a y^b z^c = m$ et $x^{a'} y^{b'} z^{c'} = m'$ est une courbe que nous désignerons en général par Γ. Cette intersection appartient également à chacune des surfaces S définies par

$$(9) \qquad x^{a+na'} y^{b+nb'} z^{c+nc'} = m m'^n,$$

où n est un paramètre variable. Disposons de n afin d'avoir

$$\Sigma(a + na') = 0 \qquad \text{ou} \qquad n = -\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}.$$

La surface correspondante, dont l'équation est de la forme

$$(10) \qquad x^{a''} y^{b''} = m'' z^{a''+b''},$$

est un cône Δ centré à l'origine. Un tel cône est déterminé par deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) non collinéaires avec O; car de (10) on déduit

$$a''(lx_i - lz_i) + b''(ly_i - lz_i) - lm'' = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

et de ces formules, les rapports $a'' : b'' : lm''$ qui suffisent pour déterminer Δ.

Cette conclusion subsiste dans le cas où le déterminant

$$\begin{vmatrix} lx_1 - lz_1 & ly_1 - lz_1 \\ lx_2 - lz_2 & ly_2 - lz_2 \end{vmatrix}$$

est nul. Dans ce cas, on a $lm'' = 0$, $m'' = 1$ et a'', b'' sont encore proportionnels à deux nombres donnés.

Considérons la relation

$$x^{a+na'} y^{b+nb'} z^{c+nc'} = \text{M}, \tag{11}$$

où n et M sont donnés, et écrivons l'équation du plan tangent en un point de coordonnées (x, y, z) à la surface correspondante

$$\sum \frac{a}{x}(\text{X} - x) + n \sum \frac{a'}{x}(\text{X} - x) = 0. \tag{12}$$

D'où l'énoncé :

Par un point donné (x, y, z) de l'espace, on peut faire passer une infinité de surfaces de la famille (11), *où n et* M *sont des paramètres indéterminés; tous les plans tangents en ce point à ces surfaces passent par une même droite.*

Les deux surfaces $x^a y^b z^c = m$ et $x^b y^a z^c = m$, où nous supposons m positif, sont symétriques par rapport au plan bissecteur passant par Oz, dans le trièdre positif; l'intersection est une courbe plane située dans ce plan et ses projections sur les plans zOx, zOy sont données par $x^{a+b} z^c = m$, $y^{a+b} z^c = m$.

L'intersection dépend donc de $a + b$ et de m. Donc :

Toutes les surfaces S *de paramètre m, donnant à $a + b$ la même valeur, passent par une même courbe plane.*

Cette conclusion se généralise aisément.

7. Soient A_1, A_2, A_3 trois points de l'espace et (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point $A_i (i = 1, 2, 3)$. Proposons-nous de faire passer une surface S par ces trois points. Soit $x^a y^b z^c = m \; (a + b + c = 1)$ l'équation de cette surface, où a, b, m sont inconnus. On peut encore l'écrire

$$a(lx - lz) + b(ly - lz) + lz = lm,$$

et en remarquant qu'elle doit être vérifiée par les coordonnées des points A_1, A_2, A_3

$$(13) \qquad a(lx_i - lz_i) + b(ly_i - lz_i) - lm = -lz_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

d'où

$$(14) \qquad a = \frac{A}{D}, \qquad b = \frac{B}{D}, \qquad c = \frac{C}{D},$$

avec

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \left| \; -lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -1 \; \right|, \\ B &= \left| \; lx_i - lz_i \quad -lz_i \quad -1 \; \right|, \\ C &= \left| \; lx_i - lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -lz_i \; \right|, \\ D &= \left| \; lx_i - lz_i \quad ly_i - lz_i \quad -1 \; \right|. \end{aligned} \right.$$

Si les quatre déterminants précédents sont différents de zéro, les valeurs de a, b, lm sont bien déterminées et ces quantités définissent entièrement la surface S passant par A_1, A_2, A_3. Si $A = 0$, la surface S correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x, et dont la section par le plan des yz a une équation de la forme $z = Cy^v$; un raisonnement analogue s'applique au cas où $B = 0$. Si $D = 0$, la surface S passant par A_1, A_2, A_3 est un cône Δ.

Les égalités $A = B = 0$ ont pour conséquence $C = D = 0$. Ce cas se présente quand les trois points donnés se trouvent sur une même courbe Γ. Les valeurs de a, b, lm sont alors indéterminées. D'où le théorème :

Une surface S *est complètement déterminée par trois points distincts lorsque ceux-ci ne se trouvent pas sur une même courbe* Γ.

8. De l'équation (9), si l'on pose successivement $b + nb' = 0$, $c + nc' = 0$, on déduit les équations de deux projections de Γ. Celles-ci sont de la forme

$$z = Cx^{v}, \qquad y = Dx^{w},$$

où C, D, v, w sont des constantes. Posons $x = C_1 \lambda^{a_1}$, λ étant un paramètre variable. On pourra définir toute courbe Γ par trois équations paramétriques telles que

$$(16) \qquad x = C_1 \lambda^{a_1}, \qquad y = C_2 \lambda^{a_2}, \qquad z = C_3 \lambda^{a_3},$$

les C_i et a_i étant des constantes.

Le plan osculateur en un point (x, y, z) d'une courbe Γ a pour équation

$$\Sigma(X - x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) = \Sigma(X - x)\lambda^{a_2+a_3-3} K_1 = 0,$$

les K_i étant des constantes appropriées. Cette relation peut s'écrire

$$\sum \frac{X}{x} K_1 C_1 = \Sigma_1 C_1.$$

L'examen de cette équation nous conduit à l'énoncé suivant :

Si A, B, C *sont les segments interceptés sur les axes par le plan osculateur en un point* M(a, b, c) *d'une courbe* Γ, *on a les relations*

$$\frac{A}{a} = C'_1, \qquad \frac{B}{b} = C'_2, \qquad \frac{C}{c} = C'_3,$$

C'_1, C'_2, C'_3 *étant indépendants de la position de* M *sur* Γ.

Inversement, considérons un plan

$$(17) \qquad Mx + Ny + Pz = 1,$$

dont les coefficients de l'équation sont des fonctions inconnues d'un paramètre variable t. Supposons qu'on ait en tout point (x, y, z) de l'arête de rebroussement d de la développable décrite par ce plan

$$(18) \qquad Mx = A_1, \qquad Ny = A_2, \qquad Pz = A_3.$$

M, N, P étant les coefficients de l'équation du plan passant par (x, y, z) et A_1, A_2, A_3 des constantes. Il s'ensuit que les plans osculateurs de d jouissent de la même propriété que ceux des courbes Γ.

On peut alors démontrer que d est nécessairement située sur une surface S. En effet, d est donnée par (17) et

$$(19) \quad M'x + N'y + P'z = 0, \qquad M''x + N''y + P''z = 0,$$

en désignant par M', M'', ... les dérivées des coefficients par rapport à t. En faisant usage des relations (18), on peut écrire les équations (19)

$$\Sigma A_1 \frac{dx}{x} = 0, \qquad \Sigma A_1 \left(\frac{dx}{x}\right)^2 = 0,$$

dont la première, intégrée, donne

$$(20) \qquad \Sigma A_1 lx = lm \qquad \text{ou} \qquad x^{A_1} y^{A_2} z^{A_3} = m,$$

m étant une constante arbitraire; d est donc bien tracée sur la surface S définie par (20).

On a aussi cet énoncé qui se démontre directement :

« Si l'on applique la transformation cruciale à une courbe Γ donnée par (16), on change celle-ci en une autre courbe du même genre ne différant de la première que par la valeur des constantes C_1, C_2, C_3. »

9. L'équation des surfaces orthogonales aux courbes Γ définies par les équations (16), où C_1, C_2, C_3 sont variables et a_1, a_2, a_3 constants, satisfait aux relations

$$p = -\frac{a_1 x}{a_3 z}, \qquad q = -\frac{a_2 y}{a_3 z}.$$

Portons ces valeurs de p et q dans la formule

$$dz = p dx + q dy;$$

on obtient l'équation $\Sigma a_1 x dx = 0$, dont l'intégrale définit un système de quadriques centrées à l'origine.

De même, si a_1, a_2, a_3 sont variables et C_1, C_2, C_3 constants, on aura

$$p = -\frac{x\, l\left(\frac{x}{C_1}\right)}{z\, l\left(\frac{z}{C_3}\right)}, \qquad q = -\frac{y\, l\left(\frac{y}{C_2}\right)}{z\, l\left(\frac{z}{C_3}\right)}$$

et

$$x\, l\left(\frac{x}{C_1}\right) dx + y\, l\left(\frac{y}{C_2}\right) dy + z\, l\left(\frac{z}{C_3}\right) dz = 0;$$

cette dernière équation a pour intégrale

(21) $$\Sigma\, l\left(\frac{x}{C_1}\right) x^2 = \Sigma\, C_1 \frac{x^2}{2} + \text{const.}$$

10. La forme spéciale des équations paramétriques des courbes Γ permet d'énoncer certains théorèmes assez élégants relatifs à la courbure de ces lignes. Si ρ est le rayon de courbure en un point M de la courbe Γ définie par

(22) $$x = C_1 \lambda^{a_1}, \qquad y = C_2 \lambda^{a_2}, \qquad z = C_3 \lambda^{a_3},$$

on pourra écrire

(23) $$\rho = \frac{[\Sigma a_1^2 x^2]^{\frac{3}{2}}}{[\Sigma a_2^2 a_3^2 (a_3 - a_2)^2 y^2 z^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

L'examen de cette équation conduit aux énoncés suivants :

1° Dans toute courbe Γ, les points possédant le même rayon de courbure en valeur absolue sont situés aux intersections de cette courbe avec une surface du sixième ordre passant par l'origine.

2° Cette surface est la même pour toutes les courbes Γ ne différant entre elles que par les valeurs de C_1, C_2, C_3, à condition de définir *a priori* la valeur attribuée à ρ.

3° Si l'on considère toutes les courbes Γ passant par un point donné, il en existe une infinité possédant en ce point le même rayon de courbure en valeur absolue. Toute surface S passant par le point donné, contient au plus six de ces courbes.

On a aussi ce théorème qui se démontre facilement :

« Dans toute surface S, l'ensemble des points où la surface a la même courbure se trouve à l'intersection de S avec une surface du huitième ordre. Cette dernière est la même pour toutes les surfaces S ne différant l'une de l'autre que par la valeur de m. »

11. Toute courbe Γ est définie complètement par deux points réels et distincts. Si Γ a deux points communs avec une surface S, elle est entièrement contenue dans S; car, par ces deux points, on peut faire passer une surface S_1, qui coupera S suivant une courbe Γ' ; Γ' passant par les deux points en question, on aura $\Gamma \equiv \Gamma'$.

Recherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe Γ donnée par (22) soit contenue dans la surface $x^a y^b z^c = m$. On a évidemment

$$C_1^a C_2^b C_3^c = m, \qquad a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = 0.$$

Considérons maintenant les expressions suivantes :

$$(24)\quad x = C_1 \lambda^{a_1} \mu^{b_1}, \qquad y = C_2 \lambda^{a_2} \mu^{b_2}, \qquad z = C_3 \lambda^{a_3} \mu^{b_3},$$

où λ, μ sont des paramètres variables et les a_i, b_i, c_i des constantes. Ces relations définissent une surface S; c'est ce qu'on vérifie en partant de l'équation du plan tangent, mise sous la forme

$$\Sigma(X - x)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = 0.$$

Cette surface coïncidera avec la surface $x^a y^b z^c = m$, si l'on a les relations

$$C_1^a C_2^b C_3^c = m, \qquad aa_1 + ba_2 + ca_3 = 0, \qquad ab_1 + bb_2 + cb_3 = 0.$$

Donc, en astreignant les a_i et b_i à satisfaire aux relations précédentes, on obtient les équations paramétriques de la surface S. Celle-ci est rapportée aux coordonées λ, μ.

12. On peut encore arriver à ce résultat en appliquant, après les avoir transformées, certaines considérations dues à Lie et à Klein. Considérons, en effet, les relations

$$x = x_0 \lambda^{a_1} \mu^{b_1}, \qquad y = y_0 \lambda^{a_2} \mu^{b_2}, \qquad z = z_0 \lambda^{a_3} \mu^{b_3},$$

où λ, μ sont des paramètres variables et x_0, y_0, z_0 ainsi que les a_i et b_i, des constantes. Cherchons la surface décrite par le point x, y, z lorsque λ et μ varient. On a d'abord

$$x = x_0(1 + \lambda - 1)^{a_1}(1 + \mu - 1)^{b_1}, \qquad \ldots.$$

Si l'on suppose que λ et μ diffèrent peu de l'unité, c'est-à-dire que $x - x_0 = dx$ soit une petite quantité du premier ordre, il viendra, en négligeant les quantités d'ordre supérieur et en posant $d\lambda = \lambda - 1$, $d\mu = \mu - 1$,

$$x = x_0(1 + a_1\, d\lambda)(1 + b_1\, d\mu), \qquad \ldots,$$

d'où

$$dx = x_0(a_1\, d\lambda + b_1\, d\mu), \qquad \ldots.$$

et, en éliminant $d\lambda$ et $d\mu$,

$$(25) \qquad \left| \frac{dx}{x_0} \quad -a_1 \quad -b_1 \right| = 0,$$

ce qui est l'équation différentielle d'une surface S.

13. En un point M(λ, μ) d'une telle surface, l'angle des lignes coordonnées est donné par

$$(26) \qquad \cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\Sigma a_1 b_1 x^2}{\sqrt{\Sigma a_1^2 x^2 \Sigma b_1^2 x^2}}.$$

On déduit de cette équation que le lieu des points pour lesquels $\cos\alpha$ est le même en module est donné par l'intersection de la surface $x^a y^b z^c = m$ avec une surface du quatrième ordre. Celle-ci est la même pour toutes les surfaces S ne différant l'une de l'autre que par la valeur attribuée à m. On voit aussi que si les trois produits $a_i b_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont de même signe, il n'existera aucun point pour lequel les lignes coordonnées sont orthogonales. Dans le cas contraire, ces points seront situés sur une courbe gauche, intersection de la surface S et d'un cône du second ordre.

Nos lignes coordonnées seront conjuguées si la relation bien connue

$$\pm \left| \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\, \partial\mu} \quad \frac{\partial y}{\partial\mu} \quad \frac{\partial z}{\partial\lambda} \right| = 0$$

est vérifiée. Dans le cas qui nous occupe, il suffira de disposer des a_i et b_i pour satisfaire à l'égalité

$$| a_1 b_1 \quad a_1 \quad b_1 | = 0.$$