

RENÉ BÉRARD

**Sur les courbes autopolaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 14  
(1914), p. 257-262

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1914\\_4\\_14\\_\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__257_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'2c]

## SUR LES COURBES AUTOPOLAIRES;

PAR M. RENÉ BÉRARD.

Dans le numéro de décembre 1913, M. Myller a établi par le calcul certaines propriétés des courbes autopolaires; je vais reprendre la question au point de vue géométrique.

1. Soient  $(S)$  une conique donnée et  $(\Sigma)$  une conique autopolaire par rapport à  $(S)$ ; il est d'abord évident que les deux coniques doivent être bitangentes. Soient  $A$  et  $B$  les contacts,  $C$  le pôle de  $AB$ ,  $M$  un point quelconque de  $(\Sigma)$  et  $P$  le pôle de la sécante  $CMN$ .

Considérons le faisceau des coniques bitangentes à  $(S)$  en  $A$  et  $B$ ; les polaires d'un point quelconque par rapport à ces coniques passent par un point fixe de  $AB$ . Pour le point  $M$ , ces polaires passeront par le point  $P$ ; si donc  $(\Sigma)$  est autopolaire par rapport à  $(S)$ , la polaire de  $M$  relative à  $(S)$  devant être tangente à  $(\Sigma)$  et passer par  $P$  sera la droite  $PN$ .

Considérons maintenant dans le faisceau les quatre coniques suivantes:  $(S)$ ,  $(\Sigma)$  la conique formée des droites  $CA$ ,  $CB$  et la conique formée par la droite double  $AB$ ; leur rapport anharmonique est égal à celui des polaires du point  $M$ , les droites  $PN$ ,  $PM$ ,  $PC$ ,  $PA$ . Or, ces quatre droites forment un faisceau harmonique; donc *le rapport anharmonique des quatre coniques considérées est égal à  $-1$  et réciproquement, si ce rapport anharmonique est égal à  $-1$ ,*

( $\Sigma$ ) est une conique autopolaire, car la polaire de M par rapport à (S) sera la droite PN.

Ceci nous montre que, si la conique ( $\Sigma$ ) est autopolaire par rapport à (S), réciproquement (S) est autopolaire par rapport à ( $\Sigma$ ).

Il en résulte aussi un moyen commode d'écrire l'équation de la conique ( $\Sigma$ ).

Soient  $f(x, y) = 0$  l'équation de (S) et  $x_0, y_0$  les coordonnées du point C; l'équation générale des coniques bitangentes à (S) en A et B est

$$(1) \quad f(x, y) + \lambda(xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 = 0.$$

Les valeurs de  $\lambda$  correspondant aux coniques (S), (AB, AB), (CA, CB) sont

$$0, \quad \infty, \quad -\frac{1}{4f(x_0, y_0)};$$

en écrivant que le rapport anharmonique

$$\left[ 0, \lambda, \infty, -\frac{1}{4f(x_0, y_0)} \right] = -1,$$

on obtient

$$\lambda = -\frac{1}{2f(x_0, y_0)},$$

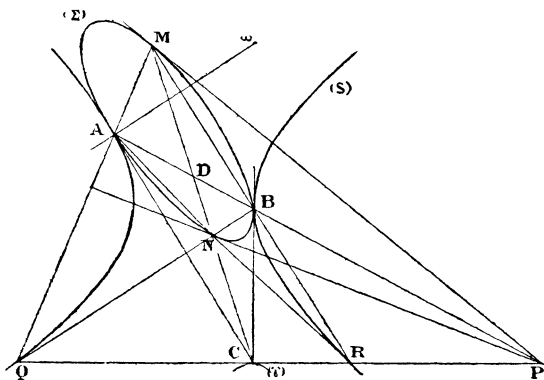
et l'équation de ( $\Sigma$ ) est

$$(2) \quad 2f(x, y)f(x_0, y_0) - (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f'_{t_0})^2 = 0.$$

2. Soit  $\omega$  le centre de courbure au point A d'une conique du faisceau (1); on voit de suite qu'il existe, en ce point, une relation homographique entre  $\lambda$  et  $y''$  et par suite entre  $\lambda$  et le rayon de courbure  $\overline{A\omega}$ . Le rapport anharmonique de quatre coniques du faisceau est donc égal à celui de leurs rayons de courbure au point A; or, pour la conique (CA, CB), ce rayon de courbure est infini et pour la droite double AB il est

nul. Donc les rayons de courbure au point  $A$  de la conique  $(S)$  et de la conique autopolaire  $(\Sigma)$  sont égaux et opposés.

3. Soit  $D$  le point de rencontre de  $AB$  et  $MN$ ;  $C$  et  $D$  sont conjugués par rapport à  $(S)$ , et il en est de



même pour les points  $M$  et  $N$ ; en outre  $C$  et  $D$  divisent harmoniquement  $MN$ .

Par suite, étant donnés deux points  $M$  et  $N$  conjugués par rapport à  $(S)$ , on pourra construire les points  $C$  et  $D$  qui sont points homologues dans deux involutions connues; en les joignant au pôle  $P$  de  $MN$ , on aura les deux sécantes  $PAB$  et  $PQR$ . Il existe une conique et une seule bitangente à  $(S)$  en  $A$  et  $B$  et autopolaire par rapport à  $(S)$ ; elle coupe  $CD$  en deux points conjugués par rapport à  $(S)$  et conjugués harmoniques par rapport à  $C, D$ ; ce sont donc les points  $M$  et  $N$ . De même, il existe une seconde conique passant par  $M$  et  $N$ , bitangente à  $(S)$  en  $Q$  et  $R$  et autopolaire.

Ainsi, par deux points conjugués par rapport à  $(S)$ , on peut faire passer deux coniques autopolaires par rapport à  $(S)$  et bitangentes en ces deux points.

4. Soient  $M'$  le point de rencontre de  $QA$  et  $RB$ ,  $N'$  le point de rencontre de  $QB$  et  $RA$  ; ces deux points sont situés sur la polaire de  $P$  par rapport à  $(S)$ . Ils sont conjugués par rapport à cette conique et divisent harmoniquement  $CD$  ; par suite,  $M'$  et  $N'$  coïncident avec  $M$  et  $N$ . La conique autopolaire  $(\Sigma)$  peut donc être engendrée de la façon suivante :

*Une sécante pivote autour d'un point  $C$  pôle de  $AB$  et coupe  $(S)$  aux points  $Q$  et  $R$  ; le lieu du point de rencontre de  $QA$  et  $RB$  est une conique autopolaire par rapport à  $(S)$ .*

Nous avons vu que, par deux points  $M$  et  $N$  conjugués par rapport à  $(S)$ , on peut faire passer deux coniques autopolaires  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  bitangentes entre elles en  $M$  et  $N$  et bitangentes à  $(S)$ , l'une en  $A$  et  $B$ , l'autre en  $Q$  et  $R$ . Si l'on voulait construire la conique autopolaire à  $(\Sigma')$  et tangente à celle-ci en  $M$  et  $N$ , le mode de génération que l'on vient d'indiquer, montre qu'elle passerait par les points  $A$  et  $B$  ; c'est donc la conique  $(\Sigma)$ .

*Ainsi, chacune des coniques  $(S)$ ,  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$  est autopolaire par rapport à chacune des deux autres.*

5. Faisons décrire au point  $C$  une courbe quelconque  $(\gamma)$  ; on sait que l'enveloppe de la conique  $(\Sigma)$  est une courbe  $(C)$  autopolaire par rapport à  $(S)$  [ outre la conique  $(S)$  elle-même ]. Soient  $M$  et  $N$  les points de contact de  $(\Sigma)$  avec l'enveloppe  $(C)$  ; la polaire de  $M$  par rapport à  $(S)$  est tangente à  $(\Sigma)$  au point  $N$ , de sorte que la droite  $MN$  passe par le point  $C$ .

Soit  $P$  le pôle de  $MN$  ; je vais montrer que  $PC$  est la tangente en  $C$  à la courbe  $(\gamma)$ .

En effet, soient  $C_1$  un autre point de  $(\gamma)$ ,  $(\Sigma_1)$  la conique autopolaire correspondante tangente à  $(S)$  en  $A_1$

et  $B_1$ . Deux des sécantes communes à  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma_1)$  passent par le point de rencontre  $D_1$  de  $AB$  et  $A_1B_1$  et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces deux droites; lorsque  $C_1$  tend vers  $C$ , l'une de ces sécantes a pour limite la droite  $AB$  et l'autre la droite  $MN$ .

Le point de rencontre  $D$  de  $MN$  et  $AB$  est donc la position limite du point  $D_1$ ; or,  $D_1$  est le pôle de  $CC_1$  par rapport à  $(S)$ . Donc  $D$  est le pôle de la tangente en  $(C)$  à la courbe  $(\gamma)$ ; cette tangente est donc la droite  $PC$ .

De là résulte la construction des points  $M$  et  $N$  qui a été indiquée par M. Myller.

On peut aussi construire ces points comme il suit :

On mène la tangente en  $C$  à  $(\gamma)$  qui rencontre  $AB$  au point  $P$ ; on construit la polaire  $CD$  de  $P$  par rapport à  $(S)$ . Les points de contact de  $(\Sigma)$  avec son enveloppe  $(C)$  sont les points  $M$  et  $N$  qui divisent harmoniquement  $CD$  et sont conjugués par rapport à  $(S)$ .

Ainsi prenons pour la courbe  $(\gamma)$  une conique autopolaire, soit  $(\Sigma)$ . A un point  $M$  de cette conique correspond une conique autopolaire  $(K)$  et ce qui précède montre que cette conique doit passer par les points  $C$  et  $D$ . L'enveloppe de  $(K)$  se compose de  $(S)$ , du point  $C$  et de la droite  $AB$ ; toutes les coniques  $(K)$  passent donc par un point fixe  $C$  lorsque  $M$  décrit  $(\Sigma)$ . Ceci est d'ailleurs évident si l'on remarque que l'équation (2) ne change pas si l'on permute  $x$  et  $x_0$ ,  $y$  et  $y_0$ .

Si donc on veut construire une conique autopolaire  $(\Sigma)$  passant par deux points donnés  $M$  et  $M_1$ , on construira les coniques autopolaires  $(K)$  et  $(K_1)$ . Le point  $C$  sera un point d'intersection de ces coniques; il y a donc en général quatre solutions.

Appelons  $z$  le point de rencontre de  $AB$  avec  $MM_1$ ; ce point a même polaire par rapport à  $(S)$  et  $(\Sigma)$ . Donc,

en appelant  $\beta$  le point de rencontre de cette polaire avec  $MM_1$ , on voit que les points  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés puisqu'ils sont conjugués par rapport à  $(S)$  et divisent harmoniquement  $MM_1$ .

Le point  $C$  est assujéti à se trouver sur l'une des droites  $\Delta, \Delta'$  polaires de  $\alpha, \beta$  par rapport à  $(S)$ ; on cherchera donc les points d'intersection de ces droites avec l'une des coniques  $(K), (K_1)$ .

Comme la conique  $(K)$  est engendrée par le point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant pour sommets les contacts des tangentes à  $(S)$  issues du point  $M$ , on pourra construire le point  $C$  à l'aide de constructions connues faites avec la règle et le compas.

Lorsque  $M$  et  $M_1$  sont conjugués par rapport à  $(S)$ , les deux coniques  $(K)$  et  $(K_1)$  sont bitangentes, la droite joignant les contacts étant la droite  $MM_1$ .