NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Relation d'Euler entre le cercle circonscrit à un triangle et les cercles tangents aux trois côtés de ce triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 366-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__366_1>

[K[1] 2b]

RELATION D'EULER ENTRE LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ET LES CERCLES TANGENTS AUX TROIS COTÉS DE CE TRIANGLE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Je considère le triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O et rayon R; j'appelle I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrits. La bissectrice AII' perce le cercle O en D et l'on a $DB = DC = DI = DI'$; la bissectrice $AI''I'''$ perce le cercle O en D' et l'on a $D'B = D'C = D'I'' = D'I'''$.

D'un point P de AII' comme centre, je décris le cercle de rayon $PQ = r$ tangent aux deux côtés de l'angle A; soit $OP = d$. Les triangles semblables APQ, $DD'C$ donnent

$$\frac{r}{DC} = \frac{AP}{2R} \qquad \text{ou} \qquad 2Rr = AP.DC.$$

En prenant un sens positif sur AD nous écrirons

$$(1) \qquad \begin{cases} 2Rr = AP.ID = AP.DI', \\ d^2 - R^2 = PA.PD; \end{cases}$$

d'où, par addition et soustraction,

$$(2) \qquad \begin{cases} d^2 - R^2 + 2Rr = AP.ID + AP.DP = AP.IP, \\ d^2 - R^2 - 2Rr = AP.I'D + AP.DP = AP.I'P. \end{cases}$$

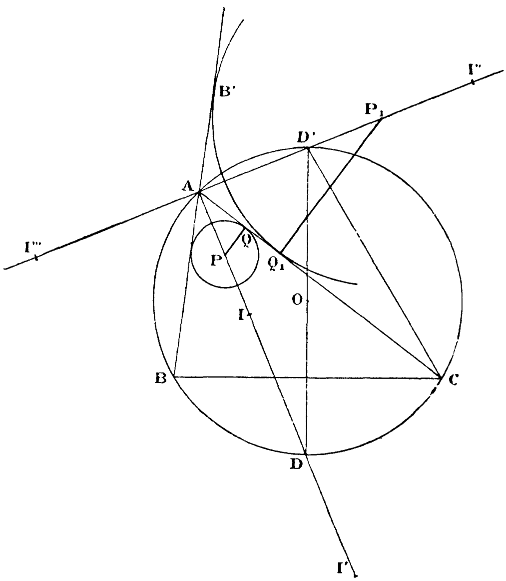
La démonstration est indépendante de la position de P sur AD : si P coïncide avec I, on a

$$(3) \qquad d^2 = R^2 - 2Rr;$$

si P coïncide avec I′,

$$(4) \qquad d^2 = R^2 + 2Rr.$$

Ce sont les relations dites d'Euler.



Si l'on prend un point P_1 sur la demi-droite AI″, on a de même, en posant encore $P_1Q_1 = r$, $OP_1 = d$,

$$(5) \qquad \begin{cases} 2Rr = AP_1.D'I'' = AP_1.I'''D, \\ d^2 - R^2 = P_1D'.P_1A; \end{cases}$$

d'où

$$(6) \qquad \begin{cases} d^2 - R^2 - 2rR = AP_1(I''D' + D'P_1) = AP_1.I''P_1, \\ d^2 - R^2 + 2rR = AP_1(I'''D' + D'P_1) = AP_1.I'''P_1. \end{cases}$$

En nous servant des relations (2) ou (6) nous démontrons aisément les réciproques : si deux cercles de centre O et P satisfont à la relation (3) ou à la relation (4), un point quelconque du cercle O est le sommet d'un triangle inscrit dans le cercle O, et qui admet pour cercle inscrit ou exinscrit le cercle P.

En effet, supposons vérifiée la relation (3) : on en déduit $R > 2r$, $d < R - r$; donc le cercle P est tout entier intérieur au cercle O : d'un point A du cercle O je mène les tangentes au cercle P, elles coupent le cercle O de nouveau en B et C; la première relation (2) devient $AP . IP = 0$, donc P coïncide avec I.

Supposons au contraire vérifiée la relation (4) : elle entraîne $R < d < R + r$. On voit aisément que si $d < 3R$, les deux cercles sont sécants, tandis que si $d > 3R$, le cercle P contient le cercle O tout entier à son intérieur; nous nous bornerons donc au cas $d < 3R$.

Je prends un point A sur la portion du cercle O extérieure au cercle P et je recommence la même construction : si le cercle P est inscrit dans l'angle BAC, la seconde relation (2) me donne $I'P = 0$; si le cercle P est inscrit dans l'un des angles adjacents à BAC, dans l'angle B'AC, par exemple, je me sers de la première relation (6) qui me donne $I''P = 0$; de toute façon, P coïncide avec le centre de l'un des cercles exinscrits au triangle ABC.