Concours d'admission à l'École polytechnique en 1914. Sujets des compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 379-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__379_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1914. SUJETS DES COMPOSITIONS.

Algèbre et Trigonométrie.

I. *Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général* $u_n = \frac{1}{n^3}$, *si l'on veut calculer la valeur de la série à un dix-millième près?*

II. 1° *Calculer l'intégrale définie*

$$f(z) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + z\cos^2 x}, \tag{1}$$

z étant un nombre supérieur à -1.

2° *Développer, suivant les puissances croissantes de z, l'expression trouvée pour* $f(z)$.

3° *Vérifier qu'on obtient bien le même résultat en partant du développement de* $\frac{1}{1+z\cos^2 x}$ *et intégrant les termes du développement, la variable x variant de* 0 *à* π, *comme l'indique la formule* (1).

III. *Étudier la variation de la fonction*

$$y = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right).$$

(4 heures.)

Géométrie analytique et mécanique.

I. *Sur la spirale logarithmique* C, *définie par l'équation* $\Gamma = ae^{m\theta}$ *en coordonnées polaires, on considère les deux points* M_0 *et* M, *définis respectivement par les angles polaires* θ_0 *et* θ.

1° *Déterminer la position du centre de gravité* G *de l'arc* M_0M.

2° *Déterminer la position limite du point* G *quand le point* M_0 *tend vers le pôle* O.

II. *Dans le cas où le point* M_0 *coïncide avec le pôle* O *de la spirale, on suppose que l'angle polaire* θ *du point* M *augmente avec la vitesse d'un radian par seconde.*

1° *Étudier la courbe* Γ, *lieu du point* G.

2° *Déterminer en grandeur et direction la vitesse* V *et l'accélération* A *du point* G, *correspondant à un angle donné* θ.

III. *Au lieu d'un arc de spirale, on considère une courbe quelconque* C. *L'extrémité* M *de l'arc* $M_0M = l$ *de cette courbe est supposée parcourir la courbe* C, *suivant une loi qui est déterminée en fonction du temps. Étant donné le centre de gravité* G *de l'arc* M_0M, *l'extrémité* M *de l'arc, la tangente* MT *au point* M, *la longueur* l *de l'arc* M_0M, *les deux premières dérivées* l' *et* l'' *de* l *par rapport au temps, déterminer, en grandeur et direction, au moyen de ces données :*

1° *La vitesse* V *du point* G:

2° *L'accélération* A *du même point.*

IV. *Dans le cas particulier où la ligne* C *est formée de deux segments rectilignes* M_0O *et* OM :

1° *Déterminer le centre de gravité* G *de la ligne* M_0OM;

2° *Trouver le lieu* Γ *du point* G *quand le segment* OM *prend toutes les longueurs possibles et pivote en outre autour du point* O *dans un plan donné.*

N. B. — On tiendra compte des considérations géométriques.

(4 heures.)

Calcul.

On donne l'équation

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

1° *Constater qu'une de ses racines x est comprise entre* $+1$ *et* $+1,5$.

2° *La méthode d'approximation de Newton est-elle applicable à la recherche de cette racine?*

3° *Former l'équation qui donne* $y = 1,5 - x$.

4° *Calculer la valeur* y_1 *qu'elle donne pour* y *quand on néglige les termes de degré supérieur au premier dans cette équation en* y.

5° *Évaluer les termes négligés dans ce calcul et déduire de cette évaluation une nouvelle valeur* y_2 *plus approchée de* y *que* y_1, *en tenant compte des termes de degré supérieur au premier.*

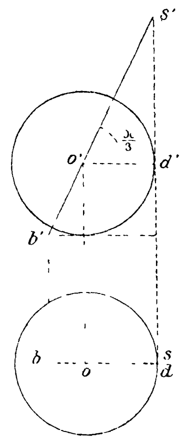
Règle à calcul ou calcul arithmétique à volonté.

(1 heure.)

Épure de Géométrie descriptive.

1° *Une sphère de* 6^{cm} *de rayon. La ligne de rappel* OO′ *des projections du centre a pour longueur* 17^{cm}. *Elle est parallèle au grand côté de la feuille, à* 14^{cm} *du bord droit, le point* O *à* 12^{cm} *du bord inférieur.*

2° *Un cône de révolution a son axe dans le plan de front du centre de la sphère. Son sommet* SS′ *est sur la verticale et au-dessus du point le plus à droite dd′ de la sphère. Une des génératrices de front passe par le centre et fait avec l'horizon-*



tale O′*d′ un angle égàl à* $\frac{\pi}{3}$. *L'autre génératrice de front est la tangente non verticale menée par s′ au contour apparent vertical de la sphère.*

On représentera le solide, supposé opaque, formé par l'ensemble de la sphère et du cône, ce dernier étant limité, d'une part, à son sommet, et, d'autre part, au plan perpendiculaire à son axe mené par la trace bb′ de la droite SO, S′O′ *sur le plan tangent à la sphère en son point le plus bas.*

(4 heures.)