NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. KOLLROS

Sur un problème de minimum

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 461-462

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__461_0>

[C1f]

SUR UN PROBLÈME DE MINIMUM;

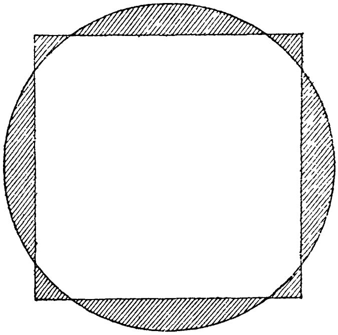
PAR M. L. KOLLROS.

Une question posée par un ingénieur m'a conduit au problème suivant :

Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre ; trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures.

On trouve un résultat inattendu au premier abord ; ce minimum est différent suivant que le cercle ou le carré varie. Il suffit évidemment de considérer la deuxième figure, qui est le huitième de la précédente.

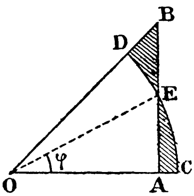
Fig. 1.



Si OA = AB est fixe et si l'on donne un accroissement au rayon du cercle, on voit que l'accroissement de la surface ACEDB est nul, aux infiniment petits du second ordre près, lorsque E est le milieu de l'arc CD. On enlève alors à l'un des triangles ACE ou BDE ce qu'on ajoute à l'autre. Il y a donc *minimum lorsque le carré fixe divise la circonférence en huit parties égales.*

Si, au contraire, le cercle est fixe, un accroissement donné à OA montre que le minimum a lieu quand E est le milieu de AB. En d'autres termes, il y a *mini-*

Fig. 2.



mum, cette fois, *lorsque le cercle fixe divise le pourtour du carré en huit parties égales.*

Il est très simple de vérifier ces résultats par l'analyse. Si l'on prend, la première fois, le demi-côté du carré fixe comme unité et l'angle $EOC = \varphi$ comme variable indépendante, on a à étudier la variation de la fonction

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} - \operatorname{tang}\varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{8}\right)(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$

qui présente bien un minimum pour $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Dans le second problème, si l'on prend le rayon du cercle fixe comme unité, c'est la fonction

$$F(\varphi) = \varphi - \frac{\pi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{2}$$

qui exprime l'aire variable; elle a un minimum pour $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}$.