Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1913

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 463-482

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__463_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1913.

Mathématiques.

GROUPE I.

I.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = xy + x^3$$

et la droite (D) *définie par les équations*

$$y = b, \qquad z = c,$$

où b *et* c *sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit, cette droite* (D) *restera fixe.*

1° *Montrer que la surface* (S) *est réglée et trouver ses génératrices.*

2° *A chaque génératrice rectiligne* (G) *de la surface* (S) *on fait correspondre le plan* (P) *mené par la droite* (D) *et parallèle à la symétrique de* (G) *par rapport au plan* xOy. *Déterminer le lieu du point d'intersection de* (G) *et de* (P), *quand la droite* (G) *décrit la surface* (S).

Montrer que ce lieu est une courbe (C) *située sur une quadrique* (Q) *et déterminer cette quadrique.*

3° *Former l'équation du quatrième degré don-*

nant les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) *avec un plan donné par son équation*

$$ux + vy + wz + s = 0.$$

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. *En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, x_4, *de quatre points de la courbe* (C) *pour que ces quatre points soient dans un même plan.*

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° *Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, *de trois points de la courbe* (C) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). *Montrer que les droites qui coupent* (C) *en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique* (Q).

5° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe* (C) *en trois points donnés se coupent sur la courbe* (C) *est que ces trois points soient en ligne droite.*

6° *Par un point quelconque* M *de la courbe* (C) *il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe* (C) *au point* M *et en un autre point* (*c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe*). *Soient* M' *et* M'' *les seconds points de contact de ces deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe* (C) *en* M' *et* M''.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses *de trois points* M, M′, M″ *de la courbe* (C) *pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe* (C)?

7° *Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points* M, M′, M″, *de la courbe* (C) *satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse* ξ *du quatrième point d'intersection* μ *de la courbe* (C) *avec le plan* (Π) *déterminé par les points* M, M′, M″.

Calculer, en fonction de ξ, *les coefficients de l'équation du plan* (Π) *et les coordonnées du point de concours* A *des tangentes à la courbe* (C) *aux points* M, M′, M″. *Ce point* A *sera dit « le point associé au point* μ *de la courbe* (C) ».

8° *Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de* b *et de* c, *par rapport auxquelles le point* A *est le pôle du plan* (Π); *déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique* (Q) *déjà considérée.*

Déterminer le lieu (Γ) *du point* A, *ainsi que l'enveloppe du plan* (Π), *quand le point* μ *décrit la courbe* (C).

9° *A trois points quelconques en ligne droite* μ_1, μ_2, μ_3, *pris sur la courbe* (C), *sont associés les trois sommets* A_1, A_2, A_3, *d'un triangle inscrit dans la courbe* (Γ). *Déterminer, en supposant* $b = 0$, *l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite* $\mu_1\mu_2\mu_3$ *varie. Montrer que, dans la même hypothèse* $b = 0$, *le cercle circonscrit au triangle* $A_1A_2A_3$ *passe par deux points fixes.*

(Durée : 6 heures.)

II.

On donne deux axes rectangulaires et l'on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2 y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales* C, *dont l'équation est de la forme* $y^2 = f(x)$, $f(x)$ *désignant un polynome en* x. *Écrire l'équation générale des courbes* C; *montrer que, par tout point du plan, il passe soit une, soit trois courbes* C, *et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes* C *qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point* $A(x = 0,5\,;\, y = 0)$. *Soit* P *celle des courbes* C *qui passe par* A *et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe* Ox; *soit* B *le point de la courbe* P *qui a pour ordonnée* $\sqrt{6}$. *Soit* Q *celle des courbes* C *passant par* B *et qui tourne sa concavité vers les* x *négatifs; soit enfin* A′ *le point où cette courbe coupe l'axe* Ox. *Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes* AB, BA′, *et l'axe* Ox.

3° *Un point mobile, partant de* A, *parcourt successivement l'arc* AB *de* P, *puis l'arc* BA′ *de* Q. *Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à* 1; *au point* B *on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à* 0,1 *près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc* ABA′.

4° *Au point* B, *l'accélération du mobile subit une discontinuité. Calculer, par ses projections sur les deux axes de coordonnées, la variation géométrique du vecteur-accélération au point* B.

(Durée : 4 heures.)

SOLUTIONS PAR M. R. BOUVAIST.

I.

1° L'équation aux ρ des points d'intersection de la surface (S) et de la droite

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}=\rho$$

est

$$\begin{aligned}&\alpha^3\rho^3+(3x_0\alpha^2+\alpha\beta)\rho^2\\&\qquad+(3\alpha x_0^2+\beta x_0+\alpha y_0-\gamma)\rho-z_0+x_0y_0+x_0^3=0;\end{aligned}$$

pour que cette droite soit une génératrice de la surface (S) il faut et il suffit que

$$\begin{aligned}\alpha&=0,\\ \beta x_0-\gamma&=0,\\ z_0&=x_0y_0+x_0^3.\end{aligned}$$

Une génératrice G de (S) aura pour équations

$$x=t,\qquad z=ty+t^3.$$

2° Le plan (P) a pour équation

$$z-c+t(y-b)=0;$$

les équations de la courbe (C) seront

$$\begin{aligned}z-c+t(y-b)&=0,\\ x&=t,\\ z&=ty+t^3\end{aligned}$$

ou

$$x = t,$$
$$y = \frac{-t^3 + tb + c}{2t},$$
$$z = \frac{t^3 + tb + c}{2};$$

cette courbe est sur la quadrique (Q),

$$x(y - b) + z - c = 0.$$

3° L'équation aux t du point d'intersection du plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

et de la courbe (C) est

$$wt^4 - vt^3 + t^2(2u + bw) + t(bv + cw + 2s) + cv = 0;$$

si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines de cette équation,

$$\Sigma t_i = \frac{v}{w}, \qquad \Sigma t_i t_j = \frac{2u + bw}{w},$$
$$\Sigma t_i t_j t_k = -\frac{bv + cw + 2s}{w}, \qquad t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{cv}{w}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de (C) soient dans un même plan est que leurs abscisses soient liées par la relation

$$(1) \qquad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{1}{c}.$$

4° La relation (1) nous donne

$$x_4 = \frac{c(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 x_2 x_3 - c};$$

si les points d'abscisses x_1, x_2, x_3 sont en ligne droite, x_4 est indéterminé et l'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 x_2 x_3 - c = 0.$$

Les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C) seront les racines de l'équation générale

$$X^3 + \lambda X - c = 0.$$

Les deux systèmes de génératrices de la quadrique Q sont

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} x = \mu_1, \\ (y - b)\mu_1 + z - c = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}\ \begin{cases} y = \mu_2, \\ x(\mu_2 - b) + z - c = 0. \end{cases}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection des génératrices du système (I) avec la surface (S) est

$$x^3 + x(2y - b) - c = 0;$$

ces génératrices rencontrent par suite (C) en trois points en ligne droite.

5° Le plan osculateur en un point x_1 de (C) rencontre la courbe au point x_1^1, tel que

$$x_1^1 = \frac{3cx_1}{x_1^3 - c},$$

d'où

$$x_1^3 - \frac{3c}{x_1^1} x_1 - c = 0;$$

cette équation est l'équation aux abscisses des points d'osculation des plans osculateurs à (C) menés par un point x_1^1 de la courbe; sa forme montre que les trois points d'oscultation sont en ligne droite.

6° Un plan tangent à (C) en x_1 rencontrera la courbe en deux points dont les abscisses sont liées par la relation

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1^2 x_2 x_3} = \frac{1}{c};$$

par x_1 passent donc deux plans bitangents à la courbe; les abscisses des seconds points de contact sont les racines de l'équation

$$x_1^2 x^2 - 2cx - 2cx_1 = 0:$$

si x' et x'' sont les racines de cette équation, on a

$$x' + x'' = \frac{2c}{x_1^2},$$

$$x'x'' = -\frac{2c}{x_1},$$

d'où

$$\frac{2(x'+x'')}{x'^2 x''^2} = \frac{1}{c},$$

relation qui montre que x' et x'' sont les contacts d'un plan bitangent à (C).

Si M, M', M'' sont trois points de (C), tels que deux quelconques d'entre eux sont les contacts d'un plan bitangent, leurs abscisses seront liées par les relations

$$\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2 x_2^2} = \frac{2(x_1+x_3)}{x_1^2 x_3^2} = \frac{2(x_2+x_3)}{x_2^2 x_3^2} = \frac{1}{c},$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2(x_2+x_3) = x_2^2(x_1+x_3) = x_3^2(x_1+x_2) = 2c,$$

d'où

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0.$$

$$x_1x_2x_3 = -2c.$$

7° L'équation générale donnant les abscisses des trois points M, M', M'' est donc

$$x^3 - \lambda x^2 + 2c = 0;$$

nous avons

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\xi}{x_1x_2x_3\xi} = \frac{1}{c} \qquad \text{d'où} \qquad \lambda + 3\xi = 0$$

et l'équation devient

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0.$$

Si le plan Π a pour équation

$$ux + vy + wz + s = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \xi = -2\xi = \frac{v}{w},$$

$$\Sigma x_i x_j + \xi \Sigma x_i = -3\xi^2 = \frac{2u + bw}{w},$$

$$x_1 x_2 x_3 + \xi \Sigma x_i x_j = -2c = -\frac{bv + cw + 2s}{w};$$

l'équation du plan Π sera donc

$$x(3\xi^2 + b) + 4\xi y - 2z - (c + 2b\xi) = 0.$$

La projection de la courbe (C) sur xOz a pour équations

$$x = t,$$

$$z = \frac{t^3 + bt + c}{2};$$

l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes à cette courbe issues du point x_0, z_0 est

$$x^3 - \frac{3}{2} x_0^1 x^2 + 2z_0 - bx_0 - c = 0.$$

Identifions cette équation à l'équation

$$x^3 + 3\xi x^2 + 2c = 0,$$

nous aurons,

$$x_0 = -2\xi,$$

$$z_0 = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

La même méthode appliquée à la projection de (C) sur xOz donne

$$y_0 = \frac{b - 3\xi^2}{2}.$$

Les coordonnées de μ sont donc

$$x_\mu = -2\xi,$$
$$y_\mu = \frac{b - 3\xi^2}{2},$$
$$z_\mu = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

8° Considérons la quadrique $f(xyz) = 0$, le plan polaire de μ par rapport à cette quadrique est

$$xf'_{x\mu} + yf'_{y\mu} + zf'_{z\mu} + tf'_{t\mu};$$

ce plan polaire doit coïncider avec le plan Π quel que soit ξ; on doit donc avoir

$$f'_{x\mu} = \lambda(3\xi^2 + b), \qquad f'_{y\mu} = 4\lambda\xi,$$
$$f'_{z\mu} = -2\lambda, \qquad f'_{t\mu} = -\lambda(c + 2b\xi);$$

quel que soit ξ, ces équations déterminent les coefficients de $f(xyz) = 0$, linéairement en fonction de deux d'entre eux, et l'on trouve sans peine

$$f(xyz) = (bx - 2z + 5c)^2 + \lambda[x(y - b) + z - c] = 0.$$

Les quadriques considérées sont donc de raccordement avec la quadrique (Q), le long de l'intersection de cette quadrique avec le plan polaire du point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$, par rapport à elle.

L'enveloppe de Π est le cône

$$(2y - b)^2 - 3(bx - 2z - c) = 0,$$

ayant pour sommet le point $0, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}$.

Le lieu Γ du point A est la conique

$$x = -2\xi,$$
$$y = \frac{b - 3\xi^2}{2},$$
$$z = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

9° Si $b = 0$, la courbe Γ devient la parabole

$$x = -2\xi,$$
$$y = -\frac{3\xi^2}{2},$$
$$z = \frac{5c}{2}.$$

Si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les abscisses des points μ_1, μ_2, μ_3 qui par hypothèse sont en ligne droite, nous aurons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ \xi_1\xi_2\xi_3 &= c. \end{aligned} \right.$$

La corde $A_1 A_2$ a pour équations

$$3x(\xi_1 + \xi_2) - 4y + 6\xi_1\xi_2 = 0,$$
$$z = \frac{5c}{2},$$

ou

$$3x\xi_3^2 + 4\lambda - 6c = 0:$$

elle enveloppe la parabole

$$2y^2 - 9cx = 0,$$
$$z = \frac{5c}{2}.$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$z = \frac{3c}{2},$$

le cercle $A_1 A_2 A_3$; l'équation aux ξ des points d'intersection de ce cercle et de Γ est

$$9\xi^4 + 2\xi^2(3\beta + 4) + 8\alpha\xi + 2\gamma = 0;$$

si ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont les racines de cette équation, on a

$$\Sigma\xi_i = 0, \qquad \Sigma\xi_i\xi_j\xi_k = -\frac{8\alpha}{9},$$

d'où, en ayant égard aux relations (1),

$$\xi_4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma = 0, \qquad \alpha = -\frac{9c}{8};$$

le cercle $A_1A_2A_3$ passe donc par le sommet de la parabole Γ, et son centre décrit une perpendiculaire à l'axe de Γ; il passe donc par deux points fixes.

II.

1° L'équation

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y}{y'} - 2x + y^2y'^2 = 0,$$

d'où, par dérivation,

$$\left(2yy' - \frac{1}{y'^2}\right)(y'^2 + yy'') = 0.$$

L'équation

$$y'^2 + yy'' = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} + \frac{y''}{y'} = 0;$$

son intégrale est

$$y^2 = Cx + C'.$$

Considérons maintenant l'équation

$$2yy' - \frac{1}{y'^2} = 0;$$

en posant $y' = p$, on a

$$y = \frac{1}{2p^3}$$

et

$$dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{p^5},$$

d'où

$$x = \frac{3}{8}\frac{1}{p^4} + C.$$

On voit d'ailleurs facilement que, pour que la fonction

$$y^2 = Cx + C'$$

vérifie l'équation différentielle donnée, il faut prendre

$$C = 2\lambda, \qquad C' = -\lambda^3.$$

L'équation générale des courbes (C) est donc

$$y^2 = 2\lambda x - \lambda^3.$$

Par un point du plan passent trois courbes (C), elles sont toutes trois réelles si l'on a

$$27y^4 - 32x^3 < 0,$$

c'est-à-dire dans la portion du plan situé entre l'axe Ox et la courbe

$$27y^4 - 32x^3 = 0.$$

En un point de cette portion du plan, les coefficients angulaires des tangentes aux courbes (C) passant par ce point sont $\frac{\lambda_1}{y}$, $\frac{\lambda_2}{y}$, $\frac{\lambda_3}{y}$, λ_1, λ_2, λ_3 étant les racines de l'équation

$$\lambda^3 - 2\lambda x + y^2 = 0.$$

Si deux de ces courbes (C) sont rectangulaires,

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{y^2} = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_3 = 1;$$

le lieu des points du plan par où passent deux courbes (C) orthogonales est donc la parabole

$$y^2 - 2x + 1 = 0.$$

2° Par le point $A(x = 0,5, y = 0)$ passent les trois courbes (C)

$$y^2 = 0,$$
$$y^2 = 2x - 1,$$
$$y^2 = -2x + 1;$$

la courbe (P) est la courbe

$$y^2 = 2x - 1.$$

Par le point situé sur cette courbe ayant pour ordonnées $\sqrt{6}$, passent outre la courbe (P) les deux courbes (C),

$$y^2 = 4x - 8,$$
$$y^2 = -6x + 27.$$

La courbe (Q) est la parabole $y^2 = -6x + 27$; elle coupe Ox au point $A'\left(x = \frac{9}{2}, y = 0\right)$.

L'aire comprise entre la courbe (P), Ox et la perpendiculaire à Ox menée par le point d'ordonnée $\sqrt{6}$ est $\int^{\sqrt{6}} y^2\, dy$; l'expression analogue relative à la courbe (Q) est $\int_0^{\sqrt{6}} \frac{y^2\, dy}{3}$; l'aire cherchée est donc

$$\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{6}} y^2\, dy = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

3° L'accélération tangentielle étant égale à la vitesse, on a

$$\frac{dv}{dt} = v,$$

d'où

$$v = e^{t+k},$$

pour

$$t = 0, \qquad v = 1;$$

donc $k = 0$ et l'on a

$$v = e^t.$$

L'équation donnant le temps t cherché sera donc

$$e^t = \text{arc AB} + \text{arc BA}';$$

$$\text{arc AB} = \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left| L\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + y\sqrt{1+y^2}\right|_0^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{L\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{42}}{2};$$

$$\text{arc BA}' = \int_0^{\sqrt{6}} dy\sqrt{1+\frac{y^2}{9}}$$

$$= \frac{3}{2}\left| L\,\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{3} + \frac{y\sqrt{y^2+9}}{9}\right|_0^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(L\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9}\right),$$

d'où

$$e^t = \frac{L\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{42}}{2} + \frac{3}{2}\left(L\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3} + \frac{\sqrt{90}}{9}\right),$$

d'où

$$t = \frac{1}{2(\log e)^2}\left[\log\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right) + 3\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}\right] + \frac{3\sqrt{42}+\sqrt{90}}{6\log e},$$

d'où

$$t = 12,707 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

4° Soit φ l'angle aigu de la normale et de la tangente à la courbe (P) en B, θ l'angle correspondant de la courbe (Q) en B; les projections sur les axes de l'accélération du mobile au point B de (P) sont

$$\gamma_x = \frac{dv}{dt}\cos\varphi + \frac{v^2}{\rho_1}\sin\varphi,$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{dt}\sin\varphi - \frac{v^2}{\rho_1}\cos\varphi;$$

or

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\rho_1 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 7\sqrt{7},$$

d'où

$$\gamma_x = e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} + \frac{e^t}{49}\right),$$

$$\gamma_y = e^t\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{e^t\sqrt{6}}{49}\right).$$

On a de même pour la courbe (Q)

$$\gamma'_x = \quad \frac{dv}{dt}\cos\theta - \frac{v^2}{\rho_2}\sin\theta,$$

$$\gamma'_y = -\left(\frac{dv}{dt}\sin\theta + \frac{v^2}{\rho_2}\cos\theta\right);$$

or

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{3}{\sqrt{6}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}, \qquad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{15}},$$

$$\rho_2 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{15\sqrt{15}}{9},$$

d'où

$$\gamma'_x = \quad e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{3e^t}{25}\right),$$

$$\gamma'_y = -e^t\left(\frac{3}{\sqrt{15}} + \frac{2^t\sqrt{6}}{25}\right).$$

Les projections de la variation géométrique du vecteur accélération en B sont donc

$$\Gamma_x = e^t\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\right) + e^{2t}\left(\frac{1}{49} + \frac{3}{25}\right),$$

$$\Gamma_y = e^t\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{15}}\right) - e^{2t}\left(\frac{\sqrt{6}}{49} - \frac{\sqrt{6}}{25}\right).$$

GROUPE II.

I.

On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. *Un point matériel* M, *de masse égale à un, est mobile dans un plan sous l'action d'une force* (F) *dont les projections* X *et* Y *sur les axes sont*

$$X = x, \qquad Y = y - 4x,$$

x *et* y *désignant les coordonnées du point* M :

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

2° *Déterminer le mouvement de* M *en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont* $(\alpha, 0)$ *et que sa vitesse a pour projections sur les axes* $(-\alpha, 2\alpha)$. *Construire la trajectoire* (T) *correspondant à ce mouvement.*

3° *Évaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque* M *de sa trajectoire* (T) *au point* M', *où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur* OM.

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire* (T) *et calculer à* 0,01 *près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire* (T) *passe par le point* O. *Évaluer, en fonction de l'abscisse du point* M, *l'aire limitée par l'arc de courbe* OM *et la corde* OM, *ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de* Oy.

II.

Évaluer à 0,01 *près les intégrales*

$$\int^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}.$$

I.

1° On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y - 4x$$

l'intégrale générale de $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ est

$$x = C\left[\frac{e^{(t+k)} + e^{-(t+k)}}{2}\right];$$

l'intégrale générale de $\frac{d^2y}{dt^2} = y - 4x$ est de la forme

$$y = Ct[\lambda e^{t+k} + \mu e^{-(t+k)}].$$

Pour que cette fonction satisfasse à l'équation différentielle donnée il faut prendre, comme on le voit aisément, $\lambda = -1$, $\mu = 1$; on aura donc

$$x = C\,\frac{e^{t+k} + e^{\ (t+k)}}{2} = C\operatorname{ch}(t+k),$$

$$y = -Ct[e^{t+k} - e^{-(t+k)}] = -2Ct\operatorname{sh}(t+k).$$

2° Les conditions initiales donnent

$$C\operatorname{ch}k = \alpha, \qquad Ce^{k} + Ce^{-k} = 2\alpha,$$

$$C\operatorname{sh}k = -\alpha, \qquad Ce^{k} - Ce^{-k} = -2\alpha;$$

d'où

$$Ce^{k} = 0,$$

$$Ce^{-k} = 2\alpha;$$

les équations de (T) sont donc

$$x = \alpha e^{-t},$$

$$y = 2\alpha t e^{-t};$$

(T) serait d'une construction facile.

3° La tangente en M′ a pour coefficient angulaire $2(t'-1)$; le coefficient angulaire de OM est $2t$.

Si la tangente en M′ est parallèle à OM,

$$2(t'-1)=2t, \qquad t'-t=1;$$

le temps mis par le mobile pour aller de M en M′ est donc constant et égal à 1.

4° L'hodographe a pour équations

$$x=-\alpha e^{-t},$$
$$y=2\alpha(1-t)e^{-t};$$

soit sur (T) un point de coordonnées x_1 et y_1 correspondant au temps t, sur l'hodographe un point de coordonnées x_2 et y_2 correspondant au temps $t+1$; on a

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=-e;$$

les deux courbes sont donc homothétiques, le centre d'homothétie est l'origine, et le rapport d'homothétie

$$-e=-2,71 \text{ à } 0,01 \text{ près.}$$

5° L'aire cherchée est

$$\int_{t_1}^{+\infty}+2\alpha^2 te^{-2t}\,dt-\alpha^2 te^{-2t},$$

$$2\alpha^2\int_{t_1}^{\infty} te^{-2t}\,dt=\alpha^2 t_1 e^{-2t_1}+\frac{\alpha^2}{2}c^{-2t_1},$$

d'où

$$\text{aire}=\frac{\alpha^2}{2}e^{-2t_1}=\frac{x_1^2}{2},$$

x_1 étant l'abscisse de M.

On a de même, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées de M :

$$\text{Volume cherché} = \frac{\pi}{3} x_1^2 y_1 - \int_{+\infty}^{t_1} \pi x^2 \, dy$$

$$= \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \int_{+\infty}^{t_1} e^{-3t} dt - t_1 e^{-3t} dt.$$

$$\text{Volume cherché} = \frac{2\pi\alpha^3}{3} t_1 e^{-3t_1} - 2\pi\alpha^3 \left(\frac{t_1 e^{-3t_1}}{3} - \frac{2e^{-3t_1}}{9} \right)$$

$$= \frac{4\pi\alpha^3}{9} e^{-3t_1},$$

$$\text{Volume cherché} = \frac{4\pi x_1^3}{9}.$$

II.

Posons

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dt}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{t^2}{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \left| \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{5}} \right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{5}} = 1,404,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt(1 + t^2)}{(t^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 5} + \frac{4}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2\,dt}{(t^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{t^2 + 5} - \left| \frac{4t}{5(t^2 + 5)} \right|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{3\pi}{5\sqrt{5}} = 0,842.$$