CLAPIER

Concours d'admission à l'École polytechnique (1914). Géométrie analytique et mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 483-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__483_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1914).

Géométrie analytique et Mécanique [1].

SOLUTION PAR M. CLAPIER.

I. Soit V l'angle constant sous lequel la spirale logarithmique C coupe chacun de ses rayons vecteurs. Nous avons

$$(1) \qquad \frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} V = \frac{1}{m}$$

et, pour un arc infinitésimal $MM' = ds$ qui se projette sur le rayon vecteur MQ,

$$(2) \qquad M'Q = MM' \sin V \qquad \text{ou} \qquad r\,d\theta = ds \sin V.$$

On déduit de ces expressions

$$(3) \qquad \text{arc MOM} = s = \left(\frac{ae^{m\theta}}{m \sin V}\right)_{M_0}^{M} = \frac{r - r_0}{\cos V}.$$

1° Soient ξ et η les coordonnées du centre de gravité G de l'arc fixe $\widehat{M_0M_1}$, de longueur l; nous avons les formules

$$l\xi = \int_{M_0}^{M_1} ds\, x, \qquad l\eta = \int_{0}^{M_1} ds\, y \qquad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

et si l'on pose

$$I = \int r^2 \cos\theta\, d\theta, \qquad J = \int r^2 \sin\theta\, d\theta,$$

$$(4) \qquad \xi = \frac{I_{M_0}^{M_1}}{l \sin V}, \qquad \eta = \frac{J_{M_0}^{M_1}}{l \sin V};$$

[1] *Voir* l'énoncé, p. 380.

nous aurons les intégrales I et J, en intégrant par parties, ce qui nous donne les égalités

$$I = ry - 2mJ, \qquad J = -rx + 2mI;$$

d'où l'on déduit

$$I(1 + 4m^2) = r(y + 2mx),$$
$$J(1 + 4m^2) = r(-x + 2my).$$

Finalement, en portant ces valeurs dans les expressions (4) et tenant compte de (1) et (3), il vient

$$\xi = \frac{m}{r_1 - r_0} J_{M_0}^{M_1}$$

ou

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{m}{1 + 4m^2} \frac{(ry)_{M_0}^{M_1} + 2m(rx)_{M_0}^{M_1}}{r - r_0}, \\ \eta &= \frac{m}{1 + 4m^2} \frac{(-rx)_{M_0}^{M_1} + 2m(ry)_{M_0}^{M_1}}{r_1 - r_0}. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions (5) donnent la position du centre de gravité G de l'arc M_0M_1, connaissant les extrémités M_0 et M_1 de cet arc.

2° Supposons que le point M_0 tende vers le pôle O; ses coordonnées deviennent nulles et la position limite du point G, correspondant à l'arc de spirale OM, est donnée par les formules

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{m}{1 + 4m^2}(y + 2mx), \\ \eta &= \frac{m}{1 + 4m^2}(-x + 2my). \end{aligned} \right.$$

II. Supposons que le point M se meuve sur la courbe C, de manière que son angle polaire augmente avec une vitesse d'un radian par seconde,

$$d\theta = n\,dt, \qquad n = \frac{180}{\pi}.$$

Le point G dont les coordonnées sont données par les expressions (6) décrit une courbe Γ qui est une spirale logarithmique.

En effet, désignons par ρ et ω les coordonnées polaires du point G; nous avons

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{m^2}{1+4m^2}(x^2+y^2), \qquad \rho = \frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$$

et

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2my - x}{2mx + y} = \frac{2m\operatorname{tang}\theta - 1}{2m + \operatorname{tang}\theta}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}V,$$

nous aurons

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}(\theta - \varphi), \qquad \omega = \theta - \varphi.$$

Il résulte, des valeurs de ρ et ω ainsi trouvées, que la courbe Γ s'obtiendra en prenant la spirale logarithmique G, obtenue en réduisant les rayons vecteurs de C dans le rapport $\frac{m}{\sqrt{1+4m^2}}$, et la faisant tourner autour du point O dans le sens inverse, d'un angle fixe φ.

2° Désignons par ξ' et η' les composantes de la vitesse du point G; pour les obtenir, en se servant des formules (6), nous devons calculer

$$x' = \frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{dy}{dt};$$

or, nous avons

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad dx = -y\,d\theta + \cos\theta\,dr,$$

$$y = r\sin\theta \qquad \text{et} \qquad dy = x\,d\theta + \sin\theta\,dr,$$

et, d'après la relation (1) qui donne dr,

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = (-y + mx)n \\ y' = (x + my)n \end{cases} \qquad \left(n = \frac{d\theta}{dt}\right).$$

Formons $y' + 2mx'$ et $-x' + 2my'$, nous obtenons

$$\xi' = \frac{m_1}{1 + 4m^2}[(1 + 2m^2)x - my]$$

$$\eta' = \frac{m_1}{1 + 4m^2}[mx + (1 + 2m^2)y]$$

$$(m_1 = n \cot V):$$

nous aurons une détermination facile de la vitesse V de composantes ξ' et η', en remarquant que celles-ci peuvent s'écrire

$$(8) \qquad \xi' = m_1(x - \xi), \qquad \eta' = m_1(y - \eta).$$

La direction de cette vitesse est GM et sa grandeur

$$V = m_1 \overline{GM}$$

est proportionnelle à la distance des deux points M et G qui se correspondent sur les courbes C et Γ.

Quant à l'accélération du point G, nous avons, d'après ces formules (8), les composantes

$$\xi'' = m_1(x' - \xi'), \qquad \eta'' = m_1(y' - \eta').$$

Ces expressions montrent que pour la construire, il suffit de composer la vitesse GV_1, équipollente à la vitesse du point M, avec la vitesse GV_2 égale et contraire à la vitesse du point G, puis multiplier par le facteur m_1 le vecteur ainsi obtenu.

III. Au lieu d'un arc de spirale, considérons une courbe quelconque C sur laquelle nous prenons une origine M_0 et sur laquelle un mobile M se meut suivant une loi déterminée, de sorte que l'on connaît la longueur de l'arc MOM en fonction du temps, ainsi que ses deux premières dérivées l' et l''.

Construisons le centre de gravité $G(\xi, \eta, \zeta)$ de cet arc et cherchons à déterminer sa vitesse V et son accélération A. Nous avons

$$l\xi = \int_{M_0}^{M} x\, ds,$$

que l'on peut écrire

$$l\xi = \int_{t_0}^{t} x \frac{ds}{dt}\, dt,$$

et d'après la définition même de l'intégrale définie, nous devrons avoir

$$\frac{d(l\xi)}{dt} = \left(x \frac{ds}{dt}\right)^{M}$$

ou bien

$$d\frac{l\xi}{dt} = x\frac{dl}{dt},$$

x étant l'abscisse de M. On a donc

$$l\frac{d\xi}{dt} = (x - \xi)\frac{dl}{dt}$$

ou encore

$$l\xi' = (x - \xi)l'. \tag{9}$$

On calculerait de même les autres composantes η et ζ' de la vitesse V. L'égalité (9) montre que cette vitesse est dirigée suivant GM et sa grandeur est précisément $\frac{l'}{l} \times \overline{GM}$.

En dérivant les deux membres de cette égalité, nous obtenons pour la composante de l'accélération A

$$l\xi'' = (x - \xi)l'' + l'(x' - 2\xi'). \tag{10}$$

Pour la construire, il suffit de composer le vecteur $\frac{l''}{l}\,\overline{\mathrm{GM}}$ avec le vecteur $\frac{l'}{l}\,\overline{\mathrm{GV}_1}$, V_1 étant le vecteur résultant de la vitesse du point M et de la vitesse égale et contraire à 2 fois la vitesse équipollente du point G.

Dans le cas où C est une spirale logarithmique, $l' = ml$, M_0 étant au pôle O.

IV. Supposons que la ligne C soit formée de deux segments rectilignes M_0O et OM; désignons par m_0 et m les milieux de ces segments. Le centre de gravité G est situé sur le segment $m_0 m$ et sa position est telle qu'on ait

$$\frac{\mathrm{G}m_0}{\mathrm{G}m} = \frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m_0};$$

il est donc situé sur la droite symétrique de la bissectrice $\mathrm{O}\mu$ par rapport à la médiane du triangle $m_0\mathrm{O}m$. OM_0 étant pris pour axe des x et $\mathrm{O}m$ pour axe des y, nous avons, pour déterminer les coordonnées x et y du point G, les relations

$$\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m_0} = \frac{a-x}{x} = \frac{y}{\mathrm{O}m - y} \qquad (\mathrm{O}m_0 = a).$$

On en déduit

$$\mathrm{O}m = \frac{a(a-x)}{x} = \frac{xy}{a-x} + y$$

et le lieu γ du point G, quand le segment OM prend toutes les valeurs possibles, est donné par l'équation

$$xy - (a-x)^2 = 0.$$

C'est une hyperbole tangente en m_0 au segment OM_0. Si le segment OM pivote autour du point O, dans un plan donné Π, cette hyperbole décrit une surface dont les directions asymptotiques sont : 1° toutes les droites issues de O et situées dans le plan Π; 2° les droites du cône engendré par les bissectrices $O\mu$ de l'angle $\widehat{mOm_0}$. Lorsque le segment OM est fixe, le rapport $\frac{m_0 G}{m_0 m}$ est aussi fixé et le point G décrit un cercle dans un plan parallèle au plan Π; un tel plan est donc un plan de section circulaire pour la surface Γ.

Si l'on prend pour axes fixes deux droites rectangulaires OY et OZ du plan Π, nous avons $y = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ et la surface Γ a pour équation

$$x^2(Y^2 + Z^2) - (a - x)^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré et la bissectrice $O\mu$ décrit un cône du deuxième degré,

$$Y^2 + Z^2 - x^2 = 0.$$