Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 14 (1914), p. 505-508
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1914_4_14__505_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère un cercle de centre* O *et de rayon fixe* a: AOB *est un diamètre fixe,* M *un point mobile sur le cercle. On projette* M *en* P *sur* AB, *puis* P *en* Q *sur* OM. *Lieu du point* Q *en coordonnées polaires et rectilignes. Aire comprise dans l'une des boucles de la courbe.*

II. *On considère la cycloïde ayant comme cercle générateur un cercle de rayon* R *et, plus particulièrement, la branche de la courbe limitée à deux points de rebroussement. Étendre à cette branche l'intégrale*

$$\int x\,dy - y\,dx,$$

l'axe Ox *étant, comme d'ordinaire, la droite qui joint les points de rebroussement de la cycloïde; l'origine est un de ces points.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer*

$$y'' - 6y' + 25y = 625x + 102\cos x.$$

Est-il possible de déterminer une courbe intégrale passant par l'origine et tangente en ce point à Ox?

(Novembre 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère un trapèze* isoscèle *de grande base* 2π, *de petite base* $2a$, *de hauteur* h. *La grande base servira d'axe* Ox, *la perpendiculaire en son milieu d'axe* Oy.

Le long de Ox, *on construit une infinité de trapèzes identiques, les grandes bases se plaçant bout à bout et toutes les petites bases venant se placer sur la droite* $y = h$. *On a ainsi un chapelet rectiligne de trapèzes qui*, si l'on fait abstraction des grandes bases, *est l'image d'une certaine fonction continue et périodique.*

On demande de représenter cette fonction par une équation $y = f(x)$, $f(x)$ *étant une série trigonométrique.*

Comme il est évident géométriquement que l'équation $y = f(x)$ *doit se réduire à* $y = h$ *si* a *croît jusqu'à* π, *on établira ce fait analytiquement en faisant* $a = \pi$ *dans le résultat général. Ce sera d'ailleurs une vérification partielle de celui-ci.*

II. *Sur une courbe, on peut imaginer un point fixe* A, *un point mobile* M, *l'arc* $AM = s$ *et le rayon de courbure* ρ *en* M. *Trouver toutes les courbes telles que*

$$\rho^2 - s^2 = a^2,$$

a *étant une constante.*

On s'attachera de préférence à déterminer ces courbes en donnant les coordonnées ordinaires x *et* y *d'un de leurs points en fonction d'un paramètre qui pourra être l'angle* α *de la tangente et de l'axe* Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un calculateur fait une table de logarithmes népériens. Il est déjà arrivé à* 100 *et sait par suite que*

$$\log \text{nép}\, 100 = 4,6052.$$

On demande de continuer le travail en calculant les logarithmes népériens de 101 *et* 102.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *D'un point* M *d'une courbe plane, rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on abaisse sur* Ox *l'ordonnée* MP. *On projette* P *en* Q *sur la tangente, puis* Q *en* R *sur* Ox.

Quelles sont les courbes pour lesquelles $RP = \text{const.} = \frac{a}{2}$.

Déterminer l'aire comprise entre l'axe Ox, *l'une de ces courbes et les deux parallèles à* Oy *menées par les points de la courbe d'ordonnées* y_0 *et* y_1.

II. *On considère la courbe*

$$\frac{y}{k} = \cos\frac{x}{l} \qquad (b \text{ et } l \text{ sont des constantes})$$

et plus particulièrement l'arc obtenu en faisant varier x *de zéro à* $\frac{\pi l}{2}$.

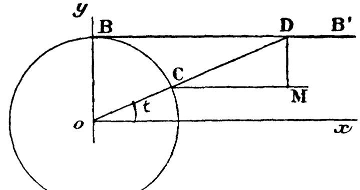
Rectification de cet arc par identification avec le quadrant d'une certaine ellipse dont on donnera les demi-axes a *et* b *en fonction de* k *et* l.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{x^6}{x^4 - 1}\,dx.$$

(Juillet 1912.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *un cercle de centre* O *et de rayon* R *et une tangente* BB' *à ce cercle au point* B *où il coupe la partie*



positive de Oy. *Une demi-droite de direction variable et issue de* O *coupe le cercle en* C *et* BB' *en* D. *Par* C, *on mène une parallèle à* Ox *et par* D *une parallèle à* Oy.

Ces deux dernières droites se coupent en un point M *dont on demande le lieu.*

On construira la courbe et l'on précisera la position des points d'inflexion.

Soit A *l'aire limitée par les axes* Ox, Oy, *la courbe, et l'ordonnée d'abscisse* x. *Montrer que*

$$\frac{2x}{R} = e^{\frac{A}{R^2}} - e^{-\frac{A}{R^2}}.$$

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 2x}{y + x}.$$

Épreuve pratique. — *Volume engendré par la cycloïde tournant autour de l'axe qui porte les points de rebroussement de la courbe.*

(Novembre 1912.)