NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Note sur les roulettes et les glissettes planes, à base rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 248-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__248_0>

[O'2p, q]

NOTE SUR LES ROULETTES ET LES GLISSETTES PLANES, A BASE RECTILIGNE;

PAR M. F. BALITRAND.

L'article de M. L. Braude, paru dans les *Nouvelles Annales* (avril 1914, p. 166), nous a suggéré l'idée d'appliquer les coordonnées tangentielles polaires à l'étude des roulettes et des glissettes planes, à base rectiligne. Les formules auxquelles on parvient dans ce système de coordonnées sont particulièrement simples. Après les avoir établies, nous en ferons quelques applications, choisies parmi les plus faciles et les plus élémentaires.

I. — ROULETTES.

Formules fondamentales. — Prenons un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy; l'axe Ox servira de base rectiligne. Une courbe mobile (C), de forme invariable, roulera sur Ox et entraînera dans son mouvement un point, qui lui est invariablement lié, P; en lui faisant décrire une courbe (P), ou roulette (P). Désignons par M le point de contact de (C) avec Ox; abaissons de P la perpendiculaire PQ sur le même axe; les coordonnées cartésiennes d'un point de la roulette sont

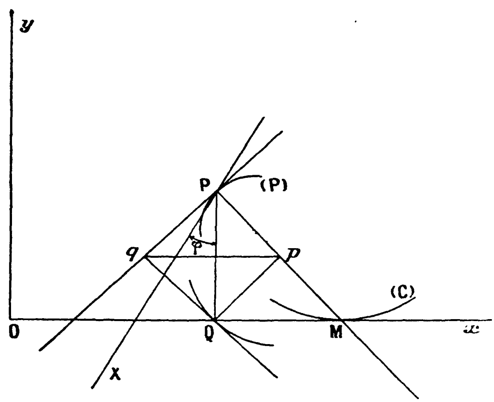
$$x = \text{OQ}, \qquad y = \text{PQ}.$$

Soit, en coordonnées tangentielles polaires,

$$(1) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad [\text{avec } p = f(\varphi)]$$

l'équation de la courbe mobile. Le pôle est au point P; l'axe polaire est une droite PX, menée par ce point,

Fig. 1.



invariablement liée à (C), et faisant avec PQ un angle égal à φ.

Dans ce système de coordonnées, l'élément d'arc de (C) a pour expression

$$ds = (p + p'')\, d\varphi,$$

d'où

$$s = p' + \int p\, d\varphi;$$

d'autre part, on sait que $\mathrm{QM} = p'$. Donc

$$x = \mathrm{OQ} = \mathrm{OM} - \mathrm{QM} = \int p\, d\varphi;$$

pourvu qu'on choisisse, sur la courbe mobile, l'origine des arcs en un point ω tel que arc $\omega\mathrm{M} = \mathrm{OM}$. En résumé, on a les formules

$$(2) \qquad x = \int p\, d\varphi = \int f(\varphi)\, d\varphi, \qquad y = p = f(\varphi),$$

qui expriment les coordonnées cartésiennes (x et y)

d'un point de la roulette en fonction du paramètre φ; d'où l'on peut tirer, si l'on veut, l'équation cartésienne de la roulette, sous la forme ordinaire, par l'élimination de φ entre lesdites équations.

Faisons quelques applications des formules (2). En premier lieu, supposons que la courbe mobile soit la spirale logarithmique d'équation $p = ae^{m\varphi}$. Les coordonnées d'un point de la roulette décrite par son pôle sont

$$x = \frac{1}{m} ae^{m\varphi}, \qquad y = ae^{m\varphi};$$

d'où $y = mx$; équation d'une droite passant par l'origine.

Supposons en second lieu que la courbe roulante soit la développante de cercle $p = a\varphi$. La roulette est la parabole d'équation

$$y^2 - 2ax = 0.$$

Prenons enfin pour courbe mobile l'épicycloïde

$$p = a \sin m\varphi,$$

où a et m sont deux constantes ayant les valeurs suivantes :

$$a = R + 2r, \qquad m = \frac{R}{R + 2r},$$

R et r étant les rayons des cercles fixe et mobile. Pour passer à l'hypocycloïde, il suffit de changer le signe de r. La roulette décrite par le centre du cercle directeur est l'ellipse

$$m^2 x^2 + y^2 = a^2.$$

Problème inverse des roulettes. — C'est le problème qui consiste à trouver une courbe, telle que, dans son roulement sur une droite, un point, qui lui est invariablement lié, engendre une courbe donnée à l'avance. Les formules précédentes le résolvent et montrent que *toute courbe plane est une roulette à base rectiligne.*

En effet, si x et y sont donnés en fonction d'un paramètre t, par les relations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \Phi(t),$$

la courbe cherchée, en vertu des formules précédentes, aura pour coordonnées tangentielles polaires

$$d\varphi = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\Phi(t)}, \qquad p = \Phi(t);$$

et, par l'élimination de t, on pourra arriver, si l'on veut, à son équation sous la forme ordinaire $p = f(\varphi)$.

Par exemple, si l'on s'impose que la roulette soit la droite $y = mx$, on a

$$p = y, \qquad d\varphi = \frac{dx}{p} = \frac{dy}{my} = \frac{dp}{mp};$$

d'où

$$p = ae^{m\varphi},$$

équation d'une spirale logarithmique; résultat conforme à celui qui a été trouvé précédemment.

D'une façon générale, toutes les fois que l'équation de la roulette sera de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

celle de la courbe roulante sera

$$\frac{dp}{d\varphi} = pf(p).$$

Ainsi dans le cas où la roulette est la parabole

$$y^2 - 2ax = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y},$$

la courbe mobile est la développante de cercle $p = a\varphi$.

Si, comme roulette, on prend la chaînette d'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

celle de la courbe mobile est

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{p\sqrt{p^2 - a^2}}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{d\varphi} = \frac{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{p^2}}}{\frac{a^2}{p^2}};$$

d'où

$$p = \frac{a}{\cos\varphi},$$

équation d'une parabole rapportée à son foyer; c'est le théorème bien connu de Bobilier.

Enveloppe d'une droite. — On peut se limiter au cas d'une droite passant par le pôle, puisque des droites parallèles ont pour enveloppes des courbes parallèles. D'ailleurs, l'axe polaire PX, étant arbitraire, on peut supposer que la droite invariablement liée à la courbe mobile, dont on cherche l'enveloppe, coïncide avec lui. Comme il fait avec l'axe des x un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$, son équation est

$$(3) \qquad \left(x - \int p\, d\varphi\right)\cos\varphi - (y - p)\sin\varphi = 0.$$

L'équation tangentielle polaire de l'enveloppe est donc

$$P = p\sin\varphi - \cos\varphi \int p\, d\varphi.$$

Pour avoir les coordonnées cartésiennes du point de contact, différentions l'équation (3), ce qui donne

$$(4) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - s\sin\varphi = 0;$$

c'est l'équation d'une droite passant par le point M et perpendiculaire à l'axe polaire : résultat qui pouvait être prévu à l'avance. Des équations (3) et (4) on tire

$$(5)\qquad \begin{cases} x = s - (p\sin\varphi + p'\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = (p\sin\varphi + p'\cos\varphi)\sin\varphi; \end{cases}$$

ce sont les coordonnées du point de contact.

Supposons par exemple que la courbe roulante soit un cercle ayant son centre au point P; dans ce cas,

$$p = a, \qquad p' = 0.$$

L'enveloppe d'un diamètre a pour équation tangentielle

$$P = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi);$$

c'est une cycloïde. Pour s'en assurer, il suffit de calculer, au moyen des formules (5), les coordonnées du point de contact. On trouve

$$x = \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Examinons en second lieu le cas où la courbe roulante est la spirale logarithmique $p = ae^{m\varphi}$. L'équation de l'enveloppe d'une droite menée par le pôle est

$$P = ae^{m\varphi}\left(\sin\varphi - \frac{1}{m}\cos\varphi\right).$$

Or, si l'on appelle V l'angle constant sous lequel la courbe est coupée par ses rayons vecteurs, on a

$$m = \cot V;$$

donc

$$P = \frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}\sin(\varphi - V),$$

c'est l'équation tangentielle de la courbe cherchée. En posant $\varphi - V = \psi$, elle peut se mettre sous la forme

$$P = \alpha e^{m\psi} \sin\psi,$$

α désignant une constante. Les coordonnées cartésiennes d'un de ses points sont

$$x = -\frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}[\sin V + m \sin\varphi \sin(\varphi - V)],$$

$$y = -\frac{ae^{m\varphi}}{\cos V}[\cos V + m \cos\varphi \cos(\varphi - V)].$$

Rectification. — Des équations (2) différentiées on déduit, en appelant σ l'arc de la roulette,

$$(6) \qquad d\sigma = \sqrt{p^2 + p'^2}\, d\varphi = r\, d\varphi,$$

r étant le rayon vecteur PM.

Or, $r\,d\varphi$ représente l'élément d'arc de la podaire lieu du point Q. En effet, soient M_1 un point, sur (C), infiniment voisin de M ; Q_1 la position correspondante de Q. En projetant Q en Q'_1 sur PQ_1, on a, en vertu de la propriété fondamentale de la tangente à la podaire,

$$\text{arc}\, QQ'_1 = PQ\, d\varphi = \text{arc}\, QQ_1 \times \cos Q_1QQ'_1$$

et

$$PQ = PM \times \cos Q_1QQ'_1 :$$

d'où

$$r\, d\varphi = \text{arc}\, QQ_1 ;$$

c'est le théorème de Steiner :

L'arc de la roulette (P) *à base rectiligne, et l'arc de la podaire de la courbe roulante par rapport à* P, *correspondant à un même arc de la courbe roulante, sont égaux.*

Si une parabole roule sur une droite, son foyer décrit une chaînette. La podaire du foyer est la tangente au sommet; donc la chaînette est absolument rectifiable.

Si c'est une épicycloïde qui est la courbe roulante, le centre du cercle directeur décrit une ellipse. La podaire de ce centre est une rosace; donc l'arc d'une rosace quelconque s'exprime au moyen des fonctions elliptiques. Lorsqu'une spirale sinusoïde roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribeaucour. Comme la podaire d'une spirale sinusoïde est une autre spirale sinusoïde, l'arc d'une ligne de Ribeaucour est toujours égal à l'arc d'une certaine spirale.

La normale en Q à la podaire s'obtient en joignant ce point au milieu p de PM. La tangente au même point coupe en q la tangente en P à la roulette. Les triangles Ppq et Qpq sont égaux et il en est de même des angles qPQ et qQP. Donc, si l'on déplace la podaire et son pôle P, de manière que le point Q vienne en P et que les deux courbes se touchent en ce point, le pôle P viendra en Q sur Ox. Comme les arcs des deux courbes sont égaux, le même fait se reproduira pour tous les couples de points correspondants de la podaire et de la roulette. Autrement dit :

Si l'on fait rouler la podaire sur la roulette, son pôle décrit l'axe Ox.

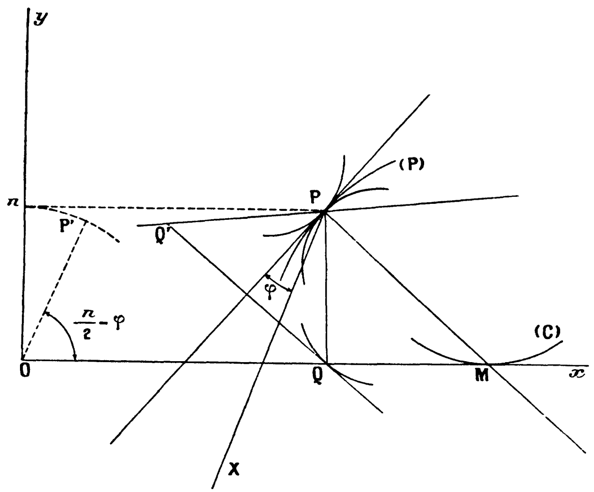
C'est le théorème de Habich. C'est un cas particulier du théorème suivant que nous avons donné dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1915, p. 90) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point invariablement lié à une courbe mobile, qui roule sur une courbe fixe, décrive une droite, est que la courbe mobile et la courbe fixe soient respectivement la radiale et la courbe de Mannheim d'une troisième courbe.

Le contact de la podaire et de la roulette, en P, peut se produire de deux façons, suivant que les deux courbes ont leurs concavités opposées ou de même sens. Le théorème de Habich ne s'applique qu'à l'un des deux cas.

Dans l'autre cas, les deux positions de la podaire étant symétriques, par rapport à la tangente en P, le pôle vient en Q′, symétrique de Q par rapport à cette tangente (*fig.* 2). On voit aisément que Q′P est la

Fig. 2.



normale en Q′ à la courbe lieu de ce point. La normale à la roulette PM, étant parallèle à QQ′, est bissectrice de l'angle de QP et de Q′P prolongé. Donc, si QP est un rayon incident, Q′P prolongé est le rayon réfléchi :

Le lieu décrit par le pôle Q′ est donc une anticaustique de la roulette pour des rayons perpendiculaires à la base.

Projetons P en π sur Oy; traçons le cercle de centre O et de rayon $O\pi$ et menons par O une droite parallèle à l'axe polaire PX qui coupe le cercle en P'. *Je dis que le lieu de* P', *quand* P *décrit la roulette, est une courbe égale à la podaire.* En effet, les rayons vecteurs des deux courbes, issus respectivement de O et de P, sont égaux. L'angle polaire $P'Ox = \omega$ est égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$; d'où $d\omega = -d\varphi$. Les arcs élémentaires des deux courbes sont égaux : ce qui, ajouté à l'égalité des rayons vecteurs, démontre la proposition.

Revenons à la formule (6). $d\varphi$ étant égal à $\frac{ds}{\rho}$, elle peut s'écrire

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{r}{\rho}. \tag{7}$$

On peut encore la mettre sous la forme

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dp}{dr}, \tag{8}$$

car on a pour ρ la valeur connue

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Quelle que soit la courbe mobile, elle peut toujours être définie, soit par une relation entre ρ et r, soit par une relation entre p et r. Prenons la formule (7) et supposons que la courbe mobile ait pour équation, ce qui est le cas le plus simple, $\frac{r}{\rho} = K$, K étant une constante.

Il en résulte $d\sigma = K.ds$. Mais ds est égal à dl

$$(l = OM);$$

donc, si la courbe mobile est caractérisée par la relation

$$\frac{r}{\rho} = \mathrm{K},$$

la roulette décrite par le pôle est telle que ses normales découpent sur la base et sur la roulette des segments proportionnels. Ces courbes ont été étudiées à plusieurs reprises dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 1902, p. 181-184, 337-443, 481-482; 1914, p. 97 et suiv.). Les roulettes ainsi obtenues sont intéressantes, parce qu'elles fournissent une classe de courbes rectifiables par la ligne droite. On sait que, parmi les courbes classiques, il y en a fort peu qui jouissent de cette propriété.

Supposons maintenant que la courbe mobile soit définie par une relation entre p et r. La formule (8) montre que l'hypothèse la plus simple est celle où

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.};$$

mais en réalité ce cas n'est pas distinct du précédent en vertu de la relation

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp}.$$

Écartant cette hypothèse, on est alors conduit aux deux suivantes : soit

$$\frac{dp}{dr} = \mathrm{K}\,\frac{r}{p},$$

soit

$$\frac{dp}{dr} = \mathrm{K}\,\frac{p}{r}.$$

La première correspond au cas où la courbe roulante est une épicycloïde ; la seconde au cas où elle est une spirale sinusoïde.

En effet, l'équation tangentielle polaire d'une épicycloïde étant

$$p = \alpha \sin m\varphi,$$

on en déduit

$$p' = m\alpha \cos m\varphi;$$

puis,

$$r^2 = p^2 + p'^2 = \alpha^2(\sin^2 m\varphi + m^2 \cos^2 m\varphi)$$
$$= (1 - m^2)p^2 + m^2\alpha^2;$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dp}{dr} = \frac{1}{1 - m^2} \times \frac{r}{p}.$$

Si l'on désigne par V l'angle sous lequel le rayon vecteur PM coupe la courbe mobile, on a

$$p = r \sin V;$$

donc

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{1 - m^2} \times \frac{1}{\sin V}.$$

Or $d\sigma \sin V$ représente la projection de l'arc élémentaire de roulette sur la base; donc :

Lorsqu'une épicycloïde roule sur une droite, le centre de son cercle directeur décrit une courbe telle que la projection d'un arc quelconque sur la base est proportionnelle à l'arc correspondant de l'épicycloïde.

Nous avons vu plus haut que cette roulette est une ellipse. L'équation tangentielle d'une spirale sinusoïde étant

$$p^m = a^m \sin m\varphi,$$

on en tire par différentiation

$$p^{m-1}p' = a^m \cos m\varphi,$$

puis

$$r^2 = p^2 + p'^2 = \frac{p^2}{\sin^2 m\varphi} = \frac{a^{2m}}{p^{2(m-1)}};$$

d'où

$$r^2 p^{2(m-1)} = a^{2m},$$

et par différentiation

$$p\,dr + (m-1)\,r\,dp = 0;$$

donc

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dp}{dr} = \frac{1}{1-m}\,\frac{p}{r};$$

et, en remplaçant p par $r\sin V$,

$$d\sigma = \frac{\sin V}{1-m}\,ds.$$

Mais $ds \sin V$ représente la projection, sur l'arc de la roulette, de l'élément d'arc de la courbe roulante; ou, ce qui est la même chose, de l'élément de la base. D'autre part, on sait que, lorsqu'une spirale sinusoïde roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribeaucour. On a donc, pour cette dernière courbe, la propriété suivante :

Les normales aux extrémités d'un arc infiniment petit d'une courbe de Ribeaucour découpent sur la base un élément dont la projection sur cet arc lui est proportionnelle.

Quadrature. — L'aire comprise entre un arc de roulette, les ordonnées de ses extrémités et la base a pour expression

$$\Sigma = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx;$$

ou bien, en vertu des formules fondamentales,

$$\Sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p^2\,d\varphi.$$

Or, l'aire correspondante de la podaire est égale à

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p^2\,d\varphi;$$

d'où ce théorème dû à Steiner :

La surface comprise entre un arc de roulette, les ordonnées extrêmes et la base est double de la surface correspondante de la podaire.

Mais, en dehors de l'aire précédente, on peut en considérer une autre liée à la roulette; c'est celle qui est balayée par le rayon vecteur PM pendant le déplacement de la courbe mobile; autrement dit, c'est celle qui est limitée par l'arc de la roulette, les normales à ses extrémités et le segment de la base compris entre ces normales.

Soient PM et P'M' deux positions infiniment voisines du rayon vecteur. Le quadrilatère mixtiligne PP'M'M est égal à la somme de deux secteurs. Le premier a pour sommet le point P, pour base l'élément de la courbe mobile; son expression est $\frac{1}{2} p\, ds$. car il peut être remplacé par un triangle de base ds et de hauteur p. Le second a pour sommet le point M, pour base l'élément de roulette; son expression est $\frac{1}{2} r\, d\sigma$, puisque la roulette est normale à PM. On a donc

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2} p\, ds + \frac{1}{2} r\, d\sigma.$$

Mais

$$d\sigma = \frac{r}{\rho}\, ds;$$

par suite

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(p + \frac{r^2}{\rho}\right) ds.$$

Supposons que la courbe appartienne à la famille définie par la relation

$$\frac{r}{\rho} = \mathrm{K};$$

à cause de

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

on aura

$$\mathrm{K}r = p + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.});$$

d'où

$$d\Sigma_1 = p\,ds + \frac{1}{2}\alpha\,ds.$$

Lorsqu'une courbe définie par la relation $\frac{r}{\rho} = \mathrm{K}$ *roule sur une droite, l'aire balayée par la normale est telle que son excès sur le double du secteur correspondant de la courbe mobile est proportionnel à la longueur de l'arc de celle-ci.*

L'élément d'aire $d\Sigma_1$ peut encore s'écrire

$$d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(p + r\frac{dp}{dr}\right)ds.$$

Si la courbe roulante est une spirale sinusoïde, on a (*voir* plus haut)

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{1-m}\,\frac{p}{r};$$

par suite,

$$d\Sigma_1 = \frac{m-2}{2(m-1)}\,p\,ds.$$

Mais $\frac{1}{2}p\,ds$ représente l'élément de surface de la courbe mobile. Donc :

Lorsqu'on fait rouler une spirale sinusoïde sur une droite, la courbe de Ribeaucour engendrée par son pôle est telle que la surface comprise entre un de ses arcs, les normales aux deux extrémités et la base, est proportionnelle à la surface du secteur correspondant de la spirale.

Courbure. — L'expression connue du rayon de courbure R de la roulette,

$$R = \frac{d\sigma^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

se met facilement, au moyen des formules fondamentales, sous la forme

$$R = \frac{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{pp'' - p'^2}.$$

A son tour celle-ci est susceptible de nombreuses transformations. On peut l'écrire

$$(9) \qquad R = \frac{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{p(p + p'') - (p^2 + p'^2)}$$

et, puisque

$$p^2 + p'^2 = r^2, \qquad p + p'' = \rho,$$

on aura

$$(10) \qquad R = \frac{r^3}{p\rho - r^2}.$$

En remplaçant p par $r \sin V$, on trouve

$$(11) \qquad R = \frac{r^2}{\rho \sin V - r}.$$

En substituant dans (10) $\frac{r\,dr}{dp}$ à ρ, on obtient

$$(12) \qquad R = \frac{r^2\, dp}{p\, dr - r\, dp}.$$

La formule (11) peut encore se transformer comme il suit :

$$(13) \qquad \left(\frac{1}{R + r} - \frac{1}{r}\right) \sin V + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Soit C le centre de courbure de la courbe mobile, correspondant au point de contact M; le cercle décrit sur MC comme diamètre coupe PM en γ. On a

$$M\gamma = \rho \sin V;$$

d'où, en vertu de (11),

$$R = \frac{r^2}{P\gamma}. \tag{14}$$

Cette dernière formule donne la construction suivante pour le centre de courbure de la roulette :

Tirer PC *jusqu'à son point de rencontre avec la perpendiculaire élevée en* M *à* PM; *par celui-ci mener une perpendiculaire à la base. Cette perpendiculaire coupe* PM *au centre de courbure cherché.*

La relation (11) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho \sin V}{r^2} - \frac{1}{r}.$$

D'autre part, le rayon de courbure de la podaire, lieu du point Q, a pour expression connue

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{r} - \frac{\rho \sin V}{r^2};$$

d'où par addition

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}.$$

De cette relation on peut déduire le théorème de Habich, que nous avons démontré ci-dessus.

Les valeurs (10), (11), (12), (13), (14) du rayon de courbure R sont au fond équivalentes; mais elles permettent de choisir, dans chaque cas particulier, celle qui convient le mieux au problème qu'on traite.

Si l'on veut que la roulette soit un cercle, on doit avoir, d'après (12),

$$\frac{r^2\, dp}{r\, dp - p\, dr} = a \qquad (a = \text{const.}),$$

ou bien

$$\frac{dp}{p} = \frac{a\,dr}{r(a-r)}.$$

En intégrant on trouve

$$p = \frac{cr}{a-r} \qquad (c = \text{constante arbitraire});$$

c'est l'équation de la courbe cherchée entre les variables p et r.

Si l'on fait rouler un cercle sur la base rectiligne, un point de sa circonférence décrit une cycloïde. La formule (14) donne immédiatement

$$R = 2PM.$$

Dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale.

Supposons que la courbe roulante appartienne à la famille caractérisée par la relation

$$\frac{r}{\rho} = K.$$

On a, en vertu de $\rho = \dfrac{r\,dr}{dp}$,

$$\frac{dp}{dr} = K, \qquad p = Kr + \alpha \qquad (\alpha = \text{const.})$$

et la formule (12) donne

$$R = \frac{r^2}{\alpha},$$

ce qui fournit une construction du centre de courbure de la roulette. Si la courbe mobile est l'épicycloïde d'équation tangentielle

$$p = \alpha \sin m\varphi,$$

on a

$$p' = m\alpha \cos m\varphi, \qquad p'' = -m^2\alpha \sin m\varphi;$$
$$\rho = p + p'' = (1 - m^2)\alpha \sin m\varphi = (1 - m^2)p;$$
$$r^2 = p^2 + p'^2 = (1 - m^2)p^2 + m^2\alpha^2.$$

En portant ces valeurs dans (10), on obtient

$$R = -\frac{r^3}{m^2\alpha^2}.$$

Le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale. Les coniques seules jouissent de cette propriété.

Prenons enfin pour courbe roulante la spirale sinusoïde d'équation

$$p^m = a^m \sin m\varphi.$$

Nous avons vu plus haut que pour ces courbes on a la relation

$$\frac{dr}{dp} = \frac{(1-m)r}{p};$$

et, comme $\rho = \dfrac{r\,dr}{dp}$,

$$\rho = \frac{(1-m)r^2}{p}.$$

Or

$$p = r \sin V;$$

donc

$$\rho \sin V = (1-m)r,$$

et, en portant cette valeur dans (11), on arrive à

$$R = -\frac{r}{m}.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel à la normale. Cette propriété, généralisation d'une propriété classique de la cycloïde, caractérise les lignes de Ribeaucour.

Que faut-il pour que R soit infini ? En vertu de (11) on doit avoir

$$\rho \sin V = r.$$

Mais cette relation n'a lieu que pour les points du cercle décrit sur le rayon de courbure de la courbe roulante comme diamètre. Tous les points de ce cercle se trouvent donc en un point d'inflexion de leur trajectoire; d'où le nom de *cercle des inflexions* qui lui a été donné.

Passons à l'étude de la courbure d'une roulette tangentielle, c'est-à-dire de la courbe enveloppée par une droite entraînée dans le déplacement de la courbe mobile.

On a vu plus haut que l'équation de la droite PX était

$$\left(x - \int p\, d\varphi\right) \cos\varphi - (y - p) \sin\varphi = 0. \tag{15}$$

En dérivant deux fois on obtient

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi - s \sin\varphi = 0, \tag{16}$$

$$x \cos\varphi - y \sin\varphi - \rho \sin\varphi - s \cos\varphi = 0. \tag{17}$$

L'équation (16) nous montre que le point de contact de la droite avec son enveloppe s'obtient en menant par M une perpendiculaire à PX. Soit N ce point. L'équation (17) prouve que le centre de courbure de la roulette tangentielle est à l'intersection de MN et de la parallèle à PX menée par le symétrique C_1 du centre de courbure C, par rapport à la base.

Les équations (15) et (16) donnent, pour les coordonnées de N,

$$x = s - (p \sin\varphi + p' \cos\varphi) \cos\varphi,$$

$$y = (p \sin\varphi + p' \cos\varphi) \sin\varphi.$$

Mais on a

$$MN = p \sin\varphi + p' \cos\varphi;$$

en désignant cette quantité par q on obtient, pour x et y,

$$x = s - q\cos\varphi, \qquad y = q\sin\varphi.$$

Des équations (16) et (17) on déduit, pour les coordonnées du centre de courbure c,

$$\xi = s + \rho\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \eta = -\rho\sin^2\varphi.$$

Par suite, si l'on appelle R_1 et σ_1 le rayon de courbure et l'arc de la roulette tangentielle, on a

$$R_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (q + \rho\sin\varphi)^2,$$
$$d\sigma_1 = R_1\,d\varphi = \left(\sin\varphi + \frac{q}{\rho}\right) ds;$$

la première de ces formules résulte évidemment de la construction que nous venons de donner du centre de courbure.

Cette construction montre aussi que les centres de courbure des courbes enveloppées par les différentes droites entraînées par la courbe mobile sont sur le cercle décrit sur MC_1 comme diamètre. Il a reçu le nom de *cercle des rebroussements :* c'est le lieu des points de rebroussement qui se présentent, à un instant donné, sur toutes les roulettes tangentielles; et l'on peut noter que toutes les tangentes de rebroussement concourent en C_1.

Si la courbe mobile est un cercle, on a, pour la roulette tangentielle d'un de ses diamètres,

$$x = \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi);$$

c'est une cycloïde.

Si c'est une courbe de Ribeaucour, on sait que sa directrice détache sur la normale un segment égal à $K\rho$. Mais $q = K\rho \sin\varphi$, donc

$$R_1 = \frac{K+1}{K} q;$$

par conséquent la roulette tangentielle enveloppée par la directrice est aussi une courbe de Ribeaucour.

En particulier pour $K = -\frac{1}{2}$, ce qui correspond à la parabole, on a $R_1 = -q$; ce qui caractérise la chaînette.

La directrice d'une parabole qui roule sur une droite enveloppe une chaînette.

II. — Glissettes.

Formules fondamentales. — Lorsqu'une courbe plane de forme invariable se déplace en restant tangente à deux courbes fixes données, un point, qui lui est invariablement lié, décrit une courbe appelée *glissette*. Par exemple, si une ellipse, de grandeur constante, reste constamment tangente à deux droites, son centre, ses foyers, ses sommets décrivent des glissettes. Il peut se faire que les courbes fixes soient des cercles, et même des cercles infiniment petits : c'est-à-dire des points. Comme cas encore plus particulier, on peut supposer que les deux points soient confondus, et alors on a une courbe, de forme invariable, qui se déplace en restant tangente à une droite, toujours au même point. Ainsi, si l'on considère toutes les paraboles égales, tangentes à une droite donnée, en un point donné, les lieux des foyers, des sommets, etc. sont des glissettes; les enveloppes des axes, des directrices, etc. sont des glissettes tangentielles.

D'ailleurs le problème des glissettes n'est pas distinct du problème des roulettes, comme le prouve le théorème bien connu suivant :

Les glissettes à base rectiligne d'une courbe donnée sont identiques aux roulettes, à base rectiligne, de la développée de cette courbe.

En effet, si une courbe de forme invariable se déplace en passant par deux points fixes, le centre instantané de rotation est à l'intersection des normales qu'on peut lui mener en ces deux points. Cela est vrai même si les deux points sont infiniment voisins. Mais alors le centre instantané se trouve sur la perpendiculaire élevée, par le point de contact, à la droite que touche la courbe mobile. Cette perpendiculaire est donc le lieu de ce centre dans le plan fixe. D'autre part, ce centre est constamment le point de rencontre de deux normales infiniment voisines. Le lieu qu'il décrit, dans le plan mobile, est donc la développée de la courbe mobile ; ce qui démontre le théorème.

Cela posé, prenons un système d'axes rectangulaires Ox et Oy, formé par la droite donnée et sa normale au point de contact fixe O. Soit P le point, invariablement lié à la courbe mobile, dont on cherche le lieu. L'équation tangentielle polaire de cette courbe, rapportée au point P pris comme pôle, et à une droite arbitraire PX comme axe polaire, est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad [p = f(\varphi)].$$

Les coordonnées du point P sont

$$x = \mathrm{OQ} = p', \qquad y = \mathrm{PQ} = p. \tag{18}$$

Par exemple, si la courbe mobile est une développante de cercle $p = a\varphi$, la glissette est la droite $x = a$.

Si c'est une spirale logarithmique, le pôle décrit la droite $x - my = 0$; si c'est un cercle de rayon a,

$$p = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - a;$$

on a

$$x = -\alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi, \qquad y = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi - a;$$

d'où

$$x^2 + (y - a)^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Le lieu est un cercle, résultat évident *a priori*.

Problème inverse des glissettes. — Les formules (18), qui donnent

$$p = y, \qquad p' = x,$$

le résolvent complètement. Après ce qui a été dit à propos des roulettes, sur ce sujet, il paraît inutile d'y revenir.

Enveloppe d'une droite. — L'équation de l'axe polaire, PX, étant

$$(x - p')\cos\varphi + (y - p)\sin\varphi = 0, \tag{19}$$

l'équation tangentielle de la courbe qu'il enveloppe est

$$P = p \sin\varphi + p' \cos\varphi.$$

Pour trouver les coordonnées du point de contact, différentions (19); nous obtenons

$$x \sin\varphi - (y - \rho)\cos\varphi = 0 \qquad (\rho = p + p''). \tag{20}$$

De (19) et (20) on déduit

$$x = (p' \cos\varphi - p'' \sin\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = p + (p' \sin\varphi + p'' \cos\varphi)\cos\varphi.$$

L'équation (20) montre que le point de contact est à l'intersection de l'axe PX et de la perpendiculaire abaissée sur lui, par le centre de courbure de la courbe mobile.

Rectification. — On a évidemment

$$ds = \sqrt{p'^2 + p''^2}\, d\varphi = r_1\, d\varphi\,;$$

r_1 désignant le rayon vecteur allant du point décrivant au centre de courbure de la courbe mobile. On retombe donc sur la formule de la théorie des roulettes où r est remplacé par r_1. C'est un résultat auquel on devait s'attendre d'après ce qui a été dit plus haut.

Quadrature. — L'aire comprise entre un arc de la glissette, les deux ordonnées extrêmes et la base a pour expression

$$\Sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} pp''\, d\varphi.$$

Cette formule ne paraît pas conduire à des résultats intéressants; mais, si l'on remplace l'axe des x par l'axe des y, l'aire analogue a pour expression

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p'^2\, d\varphi\,;$$

c'est-à-dire qu'elle est le double de la surface correspondante de la podaire de la développée de la courbe mobile : résultat conforme à celui qui a été trouvé dans la théorie des roulettes.

Courbure. — L'expression du rayon de courbure de la glissette se met aisément sous la forme

$$R_1 = \frac{r_1^3}{p'\rho_1 - r_1^2},$$

qui est identique à celle trouvée pour le rayon de courbure d'une roulette, à condition de remplacer les éléments de la courbe mobile par ceux de sa développée.

Quant aux coordonnées du centre de courbure d'une glissette tangentielle, on les obtient en différentiant (20), ce qui donne

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho\sin\varphi + \rho_1\cos\varphi = 0 \tag{21}$$

et en résolvant (20) et (21). On trouve ainsi

$$\xi = -\rho_1\cos^2\varphi, \qquad \eta = \rho - \rho_1\sin\varphi\cos\varphi.$$