Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 286-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__286_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2229.

(1914, p. 432.)

Soit MNP *le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales à une ellipse* (E) *issues d'un point* A *de cette ellipse. Démontrer que les six centres de courbure des coniques homofocales à* (E) *qui se croisent deux à deux en* M, N, P, *relatifs à ces points, sont sur la tangente en* A *à l'ellipse* (E). F. BALITRAND.

SOLUTION.

Par M. J. LEMAIRE.

On sait que, si d'un point M on mène deux tangentes à une conique (E) de centre O qu'elles touchent en A et B, le cercle MAB passe au pôle M′ de la sécante A′B′ commune à ce cercle et à cette conique, et conjuguée de AB; l'angle $\widehat{\text{MOM}'}$ a pour bissectrice l'axe focal de (E), et l'on a

$$\text{OM} \times \text{OM}' = c^2,$$

c désignant la demi-distance focale.

Par conséquent, M restant fixe, si l'on considère toutes les coniques homofocales à (E), le point M′ reste aussi fixe; le point commun aux normales aux points tels que A et B de ces coniques, étant diamétralement opposé à M sur le cercle, décrit la perpendiculaire en M′ à MM′; cette droite Δ contient en particulier les centres de courbure en M aux deux coniques du faisceau qui passent par ce point.

Si le point de concours des normales en A et B à (E) est sur cette conique, en A′ par exemple (qui est ainsi le point A de l'énoncé), la tangente en A′, qui passe en M′, et est perpendiculaire à MM′ est précisément la droite Δ, ce qui établit la proposition.

Autres solutions, par M. E.-N. BARISIEN et par M. F. DE LÉPINEY.

2230.

(1914, p. 432.)

Déterminer les courbes planes (M), *telles que les droites joignant les différents points de* (M) *aux centres de courbure correspondants de la développée, soient parallèles entre elles.* F. BALITRAND.

SOLUTION.

Par M. R. BOUVAIST.

Soit $x\sin\varphi - y\cos\varphi - p(\varphi) = 0$ une tangente à la courbe cherchée; les coordonnées d'un point de cette courbe sont

$$\begin{cases} x = p\sin\varphi + p'\cos\varphi, \\ y = p\cos\varphi - p'\sin\varphi; \end{cases}$$

les coordonnées du centre de courbure correspondant de la développée sont

$$\begin{cases} x = -(p''\sin\varphi + p'''\cos\varphi), \\ y = -p''\cos\varphi + p'''\sin\varphi; \end{cases}$$

écrivons que la droite joignant ces deux points est parallèle à Ox; il vient

$$\frac{p'+p'''}{p+p''} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

ou

$$p''+p = k\cos\varphi.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation est

$$p = \frac{k}{2}\varphi\sin\varphi + C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi.$$

Si l'on transporte l'origine au point

$$x = C_1, \qquad y = C_2,$$

les équations des courbes cherchées seront donc

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi), \\ y = -\dfrac{k}{2}\sin^2\varphi. \end{cases}$$