

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 15 (1915), p. 52-56

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__52_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS.

2231. Soient a une racine simple de l'équation $\varphi(x) = 0$ et $F(x)$ un polynome défini par l'équation

$$\varphi^2(x) = (x - a)^2 F(x).$$

Démontrer qu'on a

$$F(a) = \varphi'^2(a), \quad F'(a) = \varphi'(a)\varphi''(a),$$

$$F''(a) = \frac{\varphi''^2(a)}{4} + \frac{\varphi'(a)\varphi'''(a)}{3}, \quad \dots$$

Supposant qu'on ait

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

et que $f(x)$ soit un polynome de degré m ($m < 2n$), vérifier l'identité

$$\frac{f(x)}{(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^2} \frac{1}{(x - a_i)^2}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^3} \frac{1}{x - a_i}.$$

Les nombres a_1, a_2, \dots, a_n étant connus, déterminer le polynome $f(x)$ par la condition que la relation précédente ne contienne pas de termes de la forme

$$\frac{A_i}{x - a_i}$$

et, dans ce cas, trouver la forme de la relation considérée.

N. ABRAMESCU.

2232. Sur les perpendiculaires abaissées du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC sur les côtés de ce triangle, on prend respectivement les points D, E, F tels que

$$DB = DC = \lambda l, \quad EC = EA = \lambda m, \quad FA = FB = \lambda n,$$

l, m, n étant des nombres donnés et λ une quantité variable. Déterminer λ de telle sorte que le centre d'orthologie (deux triangles ABC, A'B'C' sont orthologiques quand les perpendiculaires des sommets A', B', C' sur BC, CA, AB sont concourantes en un point P, et aussi les perpendiculaires de A,

B, C sur B'C', C'A', A'B' concourent en un point P'; P et P' sont dits *centres d'orthologie*) des triangles ABC, DEF (autre que O) soit respectivement symétrique des sommets A, B, C par rapport aux côtés EF, DF, DE.

N. ABRAMESCU.

2233. Soient A', B', C' les pieds des trois céviennes AM, BM, CM du triangle ABC. Trouver l'enveloppe Γ de l'axe d'homologie Δ des triangles ABC, A'B'C' quand le point M décrit une courbe Σ . En particulier : 1° quand la courbe Σ est une conique circonscrite au triangle ABC, Γ se réduit à un point; 2° quand Σ est une droite, Γ est une conique inscrite au triangle ABC. Étudier la transformation M, Δ ; 3° quand la courbe Σ est une conique variable d'un faisceau passant par les points donnés A, B, C, D, la courbe Γ se réduit à un point qui décrit deux droites.

N. ABRAMESCU.

2234. De chaque point M d'une courbe (M), on abaisse une perpendiculaire MH sur une droite fixe Δ ; par le point H on mène les parallèles MT et MN à la tangente et à la normale en M à (M). Lorsque M décrit (M), ces deux droites enveloppent deux courbes (T) et (N). Montrer que les centres de courbure de ces courbes s'obtiennent par la construction suivante : Soient I le point de rencontre des normales à (T) et (N) et A la projection sur Δ du centre de courbure de la développée de (M); A' le symétrique de A par rapport à I. Les projections de A' sur les normales aux courbes (T) et (N) donnent les centres de courbure cherchés. (Comparer *Nouvelles Annales*, juin 1913, question 2207.)

F. BALITRAND.

2235. Soient A, B, C, D les pieds des normales, issues d'un point P, à une ellipse d'axes Ox et Oy. Les points B, C, D et le point A', diamétralement opposé sur l'ellipse au point A, sont sur un cercle dit *cercle de Joachimsthal*. Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient α et β les points de rencontre de la normale en A avec les axes Ox et Oy, M le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes, M₁ le symétrique de M par rapport à O; le centre cherché est le milieu du segment M₁P.

Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable.

F. BALITRAND.

2236. Trouver l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + y}.$$

E.-N. BARIEN.

2237. Les trois équations

$$(1) \quad (x - 2a)(2x + a)(x + 6a)(2x - 3a) \\ - 4ax(3x - 4a)(4x - 9a) = 0,$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{a\sqrt{2a-3x} + (a-x)\sqrt{x+2a}} \\ - \sqrt[3]{a\sqrt{2a-3x} - (a-x)\sqrt{x+2a}} = \sqrt{a}\sqrt[3]{2\sqrt{2}},$$

$$(3) \quad \sqrt[6]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 + x^3}} + \sqrt[6]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}} = \sqrt[6]{2a\sqrt{a}}$$

ont les deux racines communes $\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33})$ qui sont racines doubles de l'équation (1).

Les autres racines de l'équation (2) sont

$$0, \quad -a(3 \pm \sqrt{-3}), \quad \frac{a}{4}(3 \pm 5\sqrt{-3}).$$

Les autres racines de l'équation (3) sont

$$0, \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 + \sqrt{-3}), \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 - \sqrt{-3}).$$

E.-N. BARIEN.

2238. Établir les identités suivantes :

1°

$$1 + \frac{n}{1} \frac{1}{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \dots \\ + \frac{n}{1} \frac{1}{2n-1} + 1 = \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)};$$

2°

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1} + \frac{n-1}{1} \frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)} \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \frac{1.3.5}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \dots \\ + \frac{n-1}{2n-1} + 1 = \frac{1}{2} \frac{2.4.6\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)}. \end{aligned}$$

T. ONO.

2239. On donne deux points A, B sur chacun des axes de coordonnées rectangulaires. Soient AM, BN deux droites menées jusqu'à l'axe opposé, et P leur intersection, de telle sorte qu'on ait la relation

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{BP} + \frac{1}{PN}.$$

1° Démontrer que le lieu du point P est une strophoïde;

2° Les tangentes en A, B sont parallèles à son asymptote réelle;

3° Les deux tangentes menées de A à la courbe sont égales à OA, O étant l'origine des coordonnées;

4° L'aire de la boucle est représentée par l'expression

$$\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)^3} \left[4(a^4 - b^4) + 8ab(a^2 - b^2) \log \frac{a-b}{a+b} - (a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) \pi \right].$$

où OA = a, OB = b < a;

5° Examiner le cas particulier où a = b.

T. Ono (Kagoshima, Japon).

2240. Des pieds des bissectrices intérieures, D, E, F, d'un triangle ABC, on mène les parallèles aux côtés du triangle; elles coupent BC, CA, AB respectivement en E₂ et F₁, D₂ et E₁, D₁ et F₂. Montrer que les droites AF₁, BE₁ et CD₁, AE₂, BD₂ et CF₂ concourent en deux points J₁ et J₂ tels que la droite J₁J₂ est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC.

V. THÉBAULT.

