F. GOMES TEIXEIRA

Sur une propriété générale des cubiques circulaires unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 127-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__127_0>

[M¹5k]

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES CUBIQUES CIRCULAIRES UNICURSALES;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

On connaît bien cette propriété de la strophoïde :

Une droite quelconque passant par le centre du cercle dont elle est la cissoïdale coupe la courbe en deux points placés sur une circonférence qui passe par le nœud et a son centre au point d'intersection de la même droite avec la parallèle à l'asymptote menée par le nœud ([1]).

Je ne sais pas si l'on a déjà remarqué que cette proposition est un corollaire d'une autre, applicable à toutes les *cubiques circulaires unicursales*, comme on va le voir.

L'équation des cubiques circulaires unicursales, quand on prend pour origine le point double et pour axe des ordonnées une parallèle à l'asymptote, est

$$x(x^2+y^2) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \tag{1}$$

et l'équation de la *cissoïdale* du cercle et de la droite représentés par les équations

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)=0, \qquad x=c, \tag{2}$$

est

$$\rho = 2(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)-\frac{c}{\cos\theta},$$

([1]) *Voir*, par exemple, mon *Traité des courbes spéciales*, t. I, p. 38.

ou

$$(3) \qquad x(x^2+y^2) = 2(\alpha x + \beta y)x - c(x^2+y^2),$$

et cette équation est identique à l'équation (1) quand on détermine α, β, c au moyen des équations

$$A = 2\alpha - c, \qquad B = 2\beta, \qquad C = -c.$$

Remarquons maintenant que le cercle défini par l'équation

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0,$$

lequel passe par le point double de la cubique (3) et a son centre sur la parallèle à l'asymptote menée par ce point, coupe cette cubique en deux points placés sur la droite correspondant à l'équation

$$(5) \qquad 2(\lambda - \beta)x + 2\alpha y = 2\lambda(2\alpha - c),$$

et que cette droite passe par un point dont les coordonnées (a, b) sont données par les équations

$$a = 2\alpha - c, \qquad b = \frac{\beta(2\alpha - c)}{\alpha}.$$

La position de ce point ne dépend pas de λ et, comme ses coordonnées vérifient l'équation (3) et l'équation

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha},$$

il coïncide avec le point d'intersection de la cubique définie par l'équation (3) avec la droite qui passe par le point double et par le centre (α, β) du cercle défini par la première des équations (2), dont la cubique est la cissoïdale.

En faisant $x = 0$ dans l'équation (5), on voit encore que la droite qu'elle représente coupe l'axe des ordonnées en un point dont l'ordonnée y_1 vérifie l'équation

$$\frac{y_1}{\lambda} = \frac{2\alpha - c}{\alpha},$$

et que par conséquent le rapport de y_1 au rayon λ du cercle (4) est constant, quelle que soit la position du centre sur l'axe des ordonnées.

De tout ce qui précède résulte le théorème suivant :

Une droite quelconque D, *passant par le point d'intersection de la cubique* (3) *avec la droite qui passe par son point double et par le centre du cercle dont elle est la cissoïdale, coupe cette cubique en deux points placés sur une circonférence* (4) *qui passe par le point double et a son centre sur le parallèle à l'asymptote de la cubique, menée par ce point double. Le rapport de* y_1 *au rayon du cercle est constant et égal à* $\frac{2\alpha - c}{\alpha}$, *quelle que soit la direction de la droite* D.

Si la cubique donnée est la *strophoide*, la droite représentée par la seconde des équations (2) passe par le centre du cercle correspondant à la première, et l'on a par conséquent $c = \alpha$, et ensuite

$$a = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad y_1 = \lambda.$$

La proposition énoncée au commencement de cet article résulte, comme corollaire, du théorème qu'on vient d'énoncer et de ces égalités.