Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 177-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__177_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

606 et 607.

(1862, p. 29 et 30.)

606. *En ordonnant le discriminant* Δ *de l'équation*

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

suivant les puissances de e, *posant*

$$\Delta = Ae^3 + 3Be^2 + 3Ce + D;$$

démontrer qu'on a

$$\begin{aligned} &A^2D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^2D - 3B^2C^2 \\ &= -729(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2 \\ &\quad \times (a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^2d - 3b^2c^2)^3. \end{aligned}$$

MICHAEL ROBERTS.

607. *Soit* s_r *la somme des puissances* r *des racines de l'équation*

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0.$$

Posons

$$a^6 \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = Pf^2 + 2Qf + R,$$

alors P, Q, R *ne renferment pas* f. *Si*

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

démontrer qu'on a la relation suivante

$$Q^2 - PR = 0.$$

MICHAEL ROBERTS.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Ces deux questions sont tirées d'un article *Sur quelques théorèmes d'algèbre* par Michael Roberts, publié dans les *Annales de Tortolini*, t. IV, 1861, p. 51.

Cet article contient la démonstration désirée ou les indications nécessaires à la solution.

Le lecteur voudra bien s'y référer.

851.

(1868, p. 138.)

Trouver la suite des fonctions de Sturm pour l'équation qui donne tang $\frac{a}{n}$ *quand on connait* tang a.

G. DARBOUX.

SOLUTION
Par M. H BROCARD.

L'etude proposée a été traitée ici.

1° 1880, p. 76-81 : *Sur une application de la méthode de Sturm;* par C. BIEHLER ;

2° 1880, p. 149-152 : *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles;* par C. BIEHLER ;

3° 1880, p. 224-236; *Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles;* par E. LAGUERRE ;

4° 1887, p. 5-9; *Sur l'équation de degré m qui donne* tang $\frac{a}{m}$ *lorsque l'on connait* tang a; par C. BIEHLER.

La question 851 n'ayant pas été rappelée de façon particulière dans les quatre articles susmentionnés, a dû être considérée jusqu'à présent comme non résolue; mais il est certain que ceux-ci renferment tous les éléments voulus pour la solution désirée.

1359.

(1881, p. 144.)

ABC *étant un triangle donné, on le coupe par une sécante qui détermine sur ses côtés ou leurs prolongements six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant : Trouver l'enveloppe de la transversale.* BARBARIN.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

ABC étant pris pour triangle de référence, la transversale

$$ux + vy + wz = 0$$

a pour équation tangentielle

$$(1) \qquad \Sigma\, U^2(V + W) - KUVW = 0,$$

en posant pour abréger

$$U = \frac{u}{a}, \quad V = \frac{v}{b}, \quad W = \frac{w}{c}, \quad X = ax, \quad Y = by, \quad Z = cz,$$

et appelant K une constante. L'équation (1) peut se ramener à la forme plus commode

$$(2) \qquad (U + V)(V + W)(W + U) - K'UVW = 0$$

qui accuse une courbe de troisième classe tangente aux trois côtés du triangle et aux trois parallèles menées par les sommets.

1531.

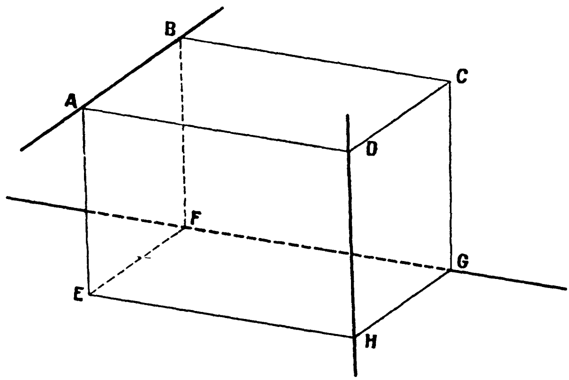
(1885, p. 248; 1915, p. 472.)

Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant. GENTY.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soit ABCDEFGH le parallélépipède construit sur les trois génératrices de même espèce AB, FG, DH d'un hyperboloïde à une nappe; il suffit évidemment de prouver que son volume ne change pas quand on remplace une seule des trois génératrices, DH par exemple, par une autre de même espèce; celle-ci doit couper AD et GH, qui sont des génératrices de l'autre



espèce, en des points D' et H'. AB et FG restant fixes, il en est de même de GH et AD, les points D' et H' déterminent sur AD et GH des divisions homographiques, et l'on a une relation de la forme

$$\lambda.\overline{AD'}.\overline{GH'} + \mu\,\overline{AD'} + \nu.\overline{GH'} + \rho = 0.$$

En supposant que D' vienne en A, puis H' en G, puis D' et H' en D et H, on obtient

$$\overline{AD'}.\overline{GH'} = \overline{AD}.\overline{GH}.$$

Le parallélogramme EFGH conserve donc, quand on fait varier la génératrice DH, un angle fixe en G compris entre des côtés dont le produit est constant; par suite son aire est constante; et comme la hauteur correspondante du parallélépipède est invariable, son volume reste bien constant.

1551.

(1885, p. 488.)

Trouver une courbe plane telle que le produit des distances d'un point fixe à deux de ses tangentes parallèles soit constant. Les coniques sont des cas particuliers.

BARBARIN.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

La question n'est pas déterminée. Le point fixe étant pris pour origine, la tangente mobile

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = a\,f(a)$$

satisfait à la condition imposée

$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}' = \pm a^2$$

si

$$(1) \qquad f(\alpha)f(\alpha+\pi) = \pm 1.$$

Il y a évidemment une infinité de fonctions résolvant cette équation. Avec le signe positif, la fonction $f(\alpha)$ est périodique (période 2π). Des solutions particulières étant trouvées, toutes leurs puissances rationnelles ou non, et leurs produits ou quotients sont aussi des solutions. Le problème comporte des courbes algébriques, par exemple le cercle pour

$$f(\alpha) = 1,$$

les coniques pour

$$f(\alpha) = \sqrt{\mathrm{K}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} - \sqrt{\mathrm{K}-1}\cos\alpha,$$

mais aussi des courbes transcendantes, par exemple celle qui correspond à

$$f(\alpha) = e^{\sin\alpha}$$

et qui a la forme de la *méridienne de l'œuf.*

Avec le signe négatif, la fonction $f(\alpha)$ est encore périodique. Exemple :

$$f(\alpha) = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

La famille des courbes proposées a une liaison remarquable avec les courbes appelées *anallagmatiques* par Moutard ; ce sont celles qui ont pour podaire par rapport à l'origine une anallagmatique ; on peut donc les désigner par le terme d'*antipodaires d'allagmatiques;* la courbe du dernier exemple est une *antipodaire de strophoïde.*

1678.

(1894, p. 4)

Lieu des sommets et enveloppe des axes des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe.

A. CAZAMIAN.

DEUXIÈME SOLUTION [1]

Par M. H. BROCARD.

Cette question paraît malaisée à traiter par l'analyse, en raison de la complication des calculs et de la difficulté de dégager les résultats. Cependant elle devient plus abordable après intervention de quelques propositions classiques, énoncées à diverses reprises dans ce Journal.

Certaines propriétés remarquables, particulièrement utiles à l'étude des paraboles ici désignées, permettent surtout de dessiner rapidement la configuration géométrique de ces coniques et d'aboutir ainsi à une autre forme de l'énoncé se prêtant mieux à l'analyse, et dispensant d'évaluer le paramètre de la parabole pour lui substituer la description d'un lieu géométrique (A) déduit d'un triangle et du cercle circonscrit, et qui a été maintes fois étudié ici et ailleurs : l'hypocycloïde triangulaire, enveloppe de la ligne pédale (ou droite de Wallace ou de Simson).

Rappelons donc les principales propriétés des paraboles conjuguées à un triangle ABC :

a Leurs foyers sont sur le cercle d'Euler ou des neuf points du triangle ABC.

J. Griffiths, question 742, **1865**, p. 429, résolue **1866**, p. 227 et retrouvée par L. Painvin, **1867**, p. 443.

Voir Note Weill, **1888**, p. 430.

b. Leurs directrices passent par un point fixe qui est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

G. Salmon, **1860**, p. 348.

J. Koehler, *Exercices de Géométrie analytique*, t. I, **1886**, p. 194.

---

[1] *Voir* 1916, p. 42.

Poujade, *J. de Math. spéc.*, question 228, résolue **1890**, p. 259.

c. Elles sont inscrites au triangle A′B′C′ des milieux des côtés du triangle ABC.

Ce triangle A′B′C′ est inscrit au cercle d'Euler, lieu du foyer F.

J. Griffiths, **1866**, p. 227.

La question est ainsi ramenée à :

Construire une parabole inscrite à un triangle A′B′C′, ayant son foyer en F (sur le cercle A′B′C′) et dont la directrice passe par un point fixe O (centre du cercle circonscrit au triangle ABC déduit du triangle A′B′C′ par des lignes parallèles);

Autrement dit :

Construire la parabole inscrite à un triangle et dont le foyer est en un point donné du cercle circonscrit à ce triangle.

Depuis que la question a été proposée, il est à croire que nombre de collaborateurs ont dû entreprendre une étude géométrique et faire intervenir certaines propositions des paragraphes (*a*) (*b*) (*c*). Peut-être même sont-ils parvenus à la description du lieu (A), mais alors ils ont été rebutés par la complication analytique.

Cependant, ils auraient pu reconnaître une question antérieure à la proposée, et dont il est fort possible qu'elle ait inspiré l'énoncé 1678, mais il fallait s'en souvenir. Il s'agit de la question 1505, de M. d'Ocagne (**1884**, p. 447).

La question 1678 n'ayant pas retenu mon attention, ce n'est qu'à l'occasion de la revision des questions demeurées non résolues que je fus amené à m'y intéresser, et si je puis aujourd'hui en appporter la solution, c'est que précisément je me suis souvenu d'avoir étudié en son temps la question 1505 et d'en avoir provoqué la solution donnée ici **1902**, p. 566-574, et **1903**, p. 48, par M. H. Lez.

Les questions 1505 et 1678 étant absolument équivalentes, on voit que la solution de la première s'applique à la seconde, et qu'ainsi, pour des paraboles conjuguées à un triangle ABC :

1° Le lieu des foyers F est le cercle circonscrit au triangle A′B′C′ des milieux des côtés;

2° Le lieu des sommets est une quartique extérieure, tangente et circonscrite au triangle;

3° L'enveloppe des axes est une hypocycloïde triangulaire tangente au cercle ABC;

4° L'enveloppe des tangentes aux sommets et une autre hypocycloïde triangulaire tangente au cercle ABC;

5° Les directrices passent par le point O, centre du cercle ABC, et orthocentre du triangle A′B′C′.

Note. — Il y aurait encore une réponse bien plus courte, ainsi qu'une référence bibliographique particulièrement intéressante : je veux parler de l'article de E. Duporcq : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, **1902**, p. 168-171, où l'on trouve exposées les remarquables propriétés que voici :

Une même hypocycloïde triangulaire est l'enveloppe : 1° des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites, 2° des tangentes aux sommets des paraboles inscrites, 3° des axes des paraboles conjuguées (toutes trois à un même triangle); 4° des axes des paraboles circonscrites à un même triangle.

A remarquer aussi qu'un cercle est le lieu : 1° des centres des hyperboles équilatères circonscrites, 2° des foyers des paraboles inscrites à un même triangle ;

Et enfin : 1° que les hyperboles équilatères passent par l'orthocentre du triangle inscrit, 2° que les directrices des paraboles passent par le centre du cercle circonscrit au triangle conjugué.

Toutes ces corrélations sont intéressantes à retenir, et c'est pourquoi j'ai cru devoir les rappeler et donner ainsi à la réponse **1673** plus de développement qu'elle n'exigeait.

1704 *bis*

(**1895**, p. 39*, **1915**, p. 288.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Examiner, en particulier, les cas où cette conique est un cercle, ou un système de deux droites. M. Weill.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Désignons par T les triangles envisagés, par S et S′ les coniques qui leur sont inscrite et circonscrite. Ces triangles T sont conjugués à une conique fixe Σ. On voit facilement en effet que si

$$S = \frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0, \qquad S' = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0,$$

$$\Sigma = \frac{p}{\alpha} x^2 + \frac{q}{\beta} y^2 + \frac{r}{\gamma} z^2.$$

Les cercles C circonscrits aux triangles T sont donc orthogonaux au cercle de Monge de Σ; il existe de plus une infinité de triangles inscrits dans chacun de ces cercles et circonscrits à S.

Soit alors

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et soit

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2 = 0$$

le cercle de Monge de Σ; nous aurons, si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

désigne un cercle C, les deux relations

$$(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^3 - r^2 - \rho^2 = 0,$$

$$[\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - \beta^2 - r^2]^2 + 4a^2 b^2 \left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right] = 0,$$

cette dernière étant la relation invariante $\theta^2 - 4\Delta\theta' = 0$ entre les coefficients de l'équation en λ de S et C.

Éliminons r^2 entre ces deux relations, nous aurons l'équation du lieu cherché :

$$(1) \qquad [2x_0 x + 2y_0 y - x_0^2 - y_0^2 + \rho^2 + a^2 + b^2]^2 - 4[a^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 b^2] = 0.$$

C'est une conique dont les directions asymptotiques sont perpendiculaires aux tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conique S.

Ce sera donc un cercle si le point $x_0 y_0$ centre de la conique Σ est un des foyers de S, une hyperbole équilatère ou une parabole si ce point est sur le cercle de Monge de S ou sur S.

Pour que la conique lieu soit un système de deux droites, il faut et il suffit que le discriminant de son équation soit nul, ce qui donne la condition

$$4[b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2] + [x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2 - \rho^2]^2 = 0.$$

L'équation de la conique lieu montre du reste que ce système de deux droites sera toujours imaginaire.

1816.

(1899, p. 148, 1915, p 568.)

On considère les pieds des quatre normales menées d'un point à une conique C, *et les quatre triangles* T *formés par les tangentes menées en ces points à* C : 1° *à chaque triangle* T *on peut circonscrire une conique* A *ayant les mêmes axes de symétrie que* C; 2° *les normales à la conique* A *aux sommets du triangle* T *sont concourantes en un point* P; 3° *de chaque point* P *on mène la quatrième normale à la conique* A *correspondante. Les quatre normales ainsi obtenues sont parallèles, et leurs pieds sont en ligne droite.* (E. Duporcq.)

Deuxième Solution

Par M. E. Fabry.

Soit l'ellipse représentée par les équations

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

La normale a pour équation

$$2axt(a+t^2) - by(1-t^4) - 2c^2t(1-t^2).$$

Par un point $M(x_0, y_0)$ on peut mener quatre normales dont les pieds sont donnés par l'équation

$$(1) \qquad by_0t^4 + 2(ax_0 + c^2)t^3 + 2(ax_0 - c^2)t - by_0 = 0.$$

Les quatre valeurs de t sont liées, quel que soit le point M, par les deux relations

$$(2) \qquad \Sigma t_1t_2 = 0, \qquad t_1t_2t_3t_4 = -1,$$

et à quatre valeurs de t, liées par ces deux relations, correspondent quatre normales concourantes. En éliminant t_4, on a la relation

$$(3)\qquad t_1 t_2 t_3 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = t_1 + t_2 + t_3.$$

Les tangentes aux points t_1 et t_2 ont pour équations

$$bx(1 - t_1^2) + 2ay t_1 = ab(1 + t_1^2),$$
$$bx(1 - t_2^2) + 2ay t_2 = ab(1 + t_2^2);$$

elles se coupent au point de coordonnées

$$(4)\qquad x = a\frac{1 - t_1 t_2}{1 + t^1 t_2}, \qquad y = b\,\frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}.$$

En permutant t_1, t_2, t_3, on a les trois sommets du triangle formé par les trois tangentes. Une conique, ayant les axes de coordonnées pour axes de symétrie, a pour équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Pour qu'elle soit circonscrite au triangle des trois tangentes en t_1, t_2, t_3, il faut que l'on ait

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{a^2}{A}(1 - t_1 t_2)^2 + \frac{b^2}{B}(t_1 + t_2)^2 = (1 + t_1 t_2)^2,\\ &\frac{a^2}{A}(1 - t_2 t_3)^2 + \frac{b^2}{B}(t_2 + t_3)^2 = (1 + t_2 t_3)^2,\\ &\frac{a^2}{A}(1 - t_3 t_1)^2 + \frac{b^2}{B}(t_3 + t_1)^2 = (1 + t_3 t_1)^2. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations, où $\frac{a^2}{A}$ et $\frac{b^2}{B}$ sont inconnues, se réduiront à deux si

$$\begin{vmatrix} (1 - t_1 t_2)^2 & (t_1 + t_2)^2 & (1 + t_1 t_2)^2 \\ (1 - t_2 t_3)^2 & (t_2 + t_3)^2 & (1 + t_2 t_3)^2 \\ (1 - t^3 t_1)^2 & (t_3 + t_1)^2 & (1 + t_3 t_1)^2 \end{vmatrix}$$
$$= 4(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)\left[t_1 t_2 t_3 \Sigma t_1 t_2 - (t_1 + t_2 + t_3)\right] = 0,$$

équation qui est vérifiée d'après l'équation (3).

Si l'on retranche la seconde équation (5) de la première, et si l'on divise par $t_3 - t_1$, on a

$$(6)\quad \frac{a^2}{A}(t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2)t_2 + \frac{b^2}{B}(t_1 + 2t_2 + t_3) = (t_1 t_2 + t_2 t_3 + 2)t_2.$$

Les deux dernières équations (5) donnent de même

$$\frac{a^2}{A}(t_2 t_3 + t_3 t_1 - 2)t_3 + \frac{b^2}{B}(t_2 + 2t_3 + t_1) = (t_2 t_3 + t_3 t_1 + 2)t_3.$$

En retranchant ces deux équations, et en divisant par $t_2 - t_3$, on a

$$(7)\quad \frac{a^2}{A}(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 - 2) + \frac{b^2}{B} = t_1 t_2 = t_2 t_3 + t_3 t_1 + 2.$$

En multipliant les deux membres par t_2, et en retranchant l'équation (6), on a

$$\frac{a^2}{A} t_1 t_2 t_3 - \frac{b^2}{B}(t_1 + t_2 + t_3) = t_1 t_2 t_3$$

et, en tenant compte de l'équation (3),

$$(8)\quad \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = 1$$

Des équations (7) et (8) on déduit

$$\frac{a^2}{A} = \left(\frac{1+\Sigma}{1-\Sigma}\right)^2, \qquad \frac{b^2}{B} = \left(\frac{2}{1-\Sigma}\right)^2, \qquad \Sigma = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1,$$

et l'équation de la conique

$$(9)\quad \frac{x^2}{a^2}(1+\Sigma)^2 + 4\frac{y^2}{b^2} = (1-\Sigma)^2.$$

On peut représenter cette ellipse, en fonction de θ, par les équations

$$x = a\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\,\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \qquad y = b(1-\Sigma)\frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

Le sommet (4) du triangle T correspond à une valeur de θ

qui doit vérifier les deux équations

$$\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}=\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2}, \qquad (1-\Sigma)\frac{\theta}{1+\theta^2}=\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2};$$

la première donne

$$\theta^2=\frac{t_1t_2-\Sigma}{1-t_1t_2\Sigma}=\frac{-t_3(t_1+t_2)}{1-t_1t_2\Sigma}$$

et, en tenant compte de (3),

$$\theta^2=\frac{-t_3(t_1+t_2)}{1-\dfrac{t_1+t_2+t_3}{t_3}}=t_3^2.$$

De la seconde équation on déduit

$$\theta=\frac{(t_1+t_2)(1+t_3^2)}{(1+t_1t_2)(1-\Sigma)}=\frac{(t_1+t_2)(1+t_3^2)}{1-t_3(t_1+t_2)-\dfrac{t_1+t_2+t_3}{t_3}}=-t_3.$$

Les trois sommets du triangle correspondent aux trois valeurs de θ égales à $-t_1$, $-t_2$, $-t_3$.

La relation (3) donne ainsi

$$\theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

et montre que les trois normales à la conique (9) sont concourantes en un point P. Les relations (2) montrent que la quatrième normale, menée de P à la conique (9), correspond à la valeur $\theta_4=-t_4$.

Le coefficient angulaire de la normale en ce point, à la conique (9), est

$$2\frac{\theta_4}{1-\theta_4^2}\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{2t_4}{t_4^2-1}\,\frac{2a}{b(1+\Sigma)}.$$

Mais les équations (2) donnent

$$\Sigma=-t_4(t_1+t_2+t_3), \qquad t_4\Sigma=-\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3},$$

$$\begin{aligned}(t_4^2-1)(1+\Sigma)&=t_4(t_1+t_2+t_3+t_4)-t_4\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)\\&=t_4(t_1+t_2+t_3+t_4+t_2t_3t_4+t_3t_4t_1+t_4t_1t_2+t_1t_2t_3)\\&=-\frac{4ax_0}{by_0}t_4\end{aligned}$$

en tenant compte de (1). Le coefficient angulaire est donc égal à $\frac{y_0}{x_0}$; c'est le même pour les quatre normales analogues.

Le pied de la normale en θ_4 à la conique (9) a pour coordonnées

$$x = a\,\frac{1-\Sigma}{1+\Sigma}\,\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}, \qquad y = b(\Sigma - 1)\frac{t_4}{1+t_4^2}.$$

En posant

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_2 + t_4 = -1\,\frac{ax_0 + c^2}{by_0},$$
$$S_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1 = 0,$$
$$S_3 = t_1t_2t_3 + t_2t_3t_4 + t_3t_4t_1 + t_4t_1t_2 = 2\,\frac{c^2 - ax_0}{by_0},$$
$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = -1,$$

on a

$$x = a\,\frac{1 + t_4(t_1+t_2+t_3) - t_4^2 - t_4\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}{1 - t_4(t_1+t_2+t_3) + t_4^2 - t_4\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)}$$
$$= a\,\frac{2 + t_4(S_1+S_3) - 2t_4^2}{2 + t_4(S_3 - S_1) + 2t_4^2} = a\,\frac{by_0(1-t_3^2) - 2ax_0t_4}{by_0(1+t_4^2) + 2c^2t_4},$$

$$y = \frac{b}{1+t_4^2}\left(-t_4 - \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}\right) = \frac{b}{1+t_4^2}\left(-t_4 + \frac{1}{t_4} + S_3\right)$$
$$= \frac{(1-t_4^2)\,by_0 + 2(c^2 - ax_0)t_4}{t_4(1+t_4^2)y_0}.$$

Remplaçons partout la première puissance de t_4 par l'expression, déduite de (1),

$$t_4 = \frac{by_0}{2}\,\frac{1-t_4^4}{ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2 - 1)}.$$

On aura

$$x = a\,\frac{(1-t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2-1)] - ax_0(1-t_4^4)}{(1+t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2-1)] + c^2(1-t_4^4)}$$
$$= -\frac{c^2}{ax_0}\left(\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2}\right)^2,$$

$$y = 2\,\frac{(1-t_4^2)[ax_0(1+t_4^2) + c^2(t_4^2-1)] + (c^2 - ax_0)(1-t_4^4)}{(1+t_4^2)y_0(1-t_4^4)}$$
$$= \frac{4c^2t_4^2}{y_0(1+t_4^2)^2}.$$

On en déduit

$$\frac{yy_0}{4} - xx_0 = c^2.$$

Les pieds des quatre normales analogues sont sur cette droite.

Les mêmes calculs s'appliquent à l'hyperbole, en remplaçant b par bi et t par $-ti$, ce qui donne les équations de l'hyperbole

$$x = a\,\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = b\,\frac{2t}{1-t^2}.$$

Autre solution par M. J. LEMAIRE.