R. GOORMAGHTIGH

Sur les familles de cercles

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 1-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[K¹6b][K¹11]

SUR LES FAMILLES DE CERCLES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Considérons une famille de cercles π dépendant d'un paramètre; le lieu de leurs centres P est une courbe Γ et leur rayon R est une fonction de l'arc s de cette courbe. En vue d'employer les méthodes de la Géométrie intrinsèque, prenons pour axes mobiles des x et des y la tangente et la normale en P à la courbe Γ (*fig.* 1). D'une manière générale, les coordonnées des points où la courbe

$$f(x, y, s) = 0$$

touche son enveloppe s'obtiennent [1] en résolvant le système formé par cette équation et

$$(y - \rho)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \tag{1}$$

où ρ désigne le rayon de courbure de Γ en P.

Or, l'équation du cercle π est

$$f(x, y, s) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

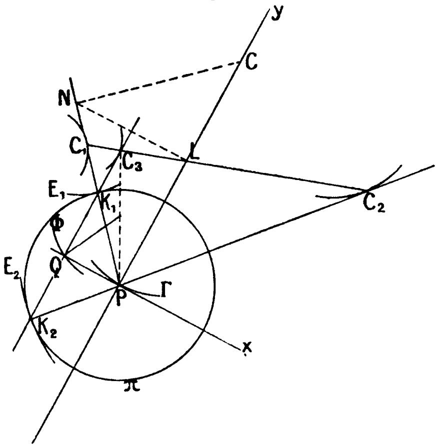
[1] CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 24.

Pour ce cercle, l'équation (1) devient

$$x = -\mathrm{R}\,\frac{d\mathrm{R}}{ds}.$$

Par suite, si l'on désigne l'angle $\mathrm{K}_1\mathrm{P}x$ par θ, les

Fig. 1.



coordonnées des points K_1 et K_2 où π touche son enveloppe s'écrivent

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y = \pm\,\mathrm{R}\sin\theta,$$

et l'on a

$$\cos\theta = -\,\frac{d\mathrm{R}}{ds}. \tag{2}$$

L'angle θ sera obtus quand R croît en même temps que s, aigu dans le cas contraire.

Les points où un cercle π *de centre* P *touche son enveloppe sont symétriques par rapport à la tangente en* P *au lieu des centres des cercles considérés* [1].

---

[1] Ce résultat et la relation (2) s'établissent aisément au moyen d'une considération de limites.

2. L'enveloppe se compose de deux branches E_1 et E_2 qui sont les lieux des points K_1 et K_2. Cherchons les coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2) des centres de courbure C_1, C_2 de E_1, E_2 respectivement en K_1 et K_2. La droite PK_1 a pour équation

$$y - x \operatorname{tang}\theta = 0. \tag{3}$$

Pour trouver les coordonnées du point C_1 où cette droite touche son enveloppe, il suffit de résoudre le système formé par (3) et l'équation

$$(y - \rho) \operatorname{tang}\theta + x + \frac{\rho x}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

obtenue en dérivant (3) sous la forme (1). On trouve ainsi

$$x_1 = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{d\theta}{ds}}, \qquad y_1 = \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{d\theta}{ds}}. \tag{4}$$

De même, on obtient

$$x_2 = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{d\theta}{ds}}, \qquad y_2 = \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{d\theta}{ds}}. \tag{5}$$

On en déduit

$$PC_1 = \left|\frac{\sin\theta}{\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{d\theta}{ds}}\right|, \qquad PC_2 = \left|\frac{\sin\theta}{\dfrac{1}{\rho} - \dfrac{d\theta}{ds}}\right|, \tag{6}$$

et

$$\sin\theta\left(\frac{\varepsilon_1}{PC_1} + \frac{\varepsilon_2}{PC_2}\right) = \frac{2}{\rho},$$

où $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ suivant les cas. Ceci exprime (1) que la courbe Γ a en P même centre de courbure que la conique qui touche Γ en ce point et a C_1 et C_2 pour foyers.

---

(1) Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 47.

Les centres de courbure des deux branches de l'enveloppe du cercle π sont les foyers d'une conique ayant en P *avec* Γ *un contact du deuxième ordre.*

On peut énoncer ce théorème sous la forme suivante, utile pour certaines constructions :

Si l'on projette le centre de courbure C *de* Γ *sur* PC_1, *puis le point obtenu sur* PC, *cette dernière projection appartient à la droite* C_1C_2.

3. Des expressions (4) et (5) on déduit le coefficient angulaire de la droite C_1C_2

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{d\theta}{ds}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{d\theta}{ds}}}\operatorname{tang}\theta=-\rho\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Cette droite a donc pour équation

$$y-\frac{\sin^2\theta}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}}=-\rho\operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{ds}\left(x-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{d\theta}{ds}}\right)$$

ou, plus simplement,

$$y=\rho\sin\theta\left(\sin\theta-\frac{x}{\cos\theta}\frac{d\theta}{ds}\right). \tag{7}$$

Elle coupe la droite K_1K_2, d'équation

$$x-R\cos\theta=0, \tag{8}$$

en un point d'ordonnée

$$\rho\sin\theta\left(\sin\theta-R\frac{d\theta}{ds}\right). \tag{9}$$

Cherchons, d'autre part, l'ordonnée du point C_3 où la droite K_1K_2 touche son enveloppe. Résolvons donc le système d'équations formé par (8) et l'équation

$$(10) \qquad y - \rho - \rho\cos\theta\frac{dR}{ds} + \rho R\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = 0,$$

obtenue en dérivant (8) sous la forme (1). En tenant compte de (2), l'équation (10) s'écrit

$$(11) \qquad y - \rho\sin^2\theta + \rho R\sin\theta\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

De (8) et (11) on déduit pour l'ordonnée de C_3

$$\rho\sin\theta\left(\sin\theta - R\frac{d\theta}{ds}\right),$$

valeur identique à (9). On a donc ce théorème :

Les centres de courbure de l'enveloppe en ses points de contact avec un cercle π sont en ligne droite avec le point où la corde de contact de cette enveloppe avec ce cercle touche son enveloppe.

Ce théorème donne lieu à des conséquences intéressantes dont quelques-unes sont des propositions connues [1]. Il peut être considéré comme la généralisation d'une propriété des centres de courbure aux points correspondants de deux courbes inverses.

Si l'on applique le théorème de Menelaüs au triangle C_1PC_2 coupé par la transversale $K_1K_2C_3$, on voit que le point C_3 divise C_1C_2 dans le rapport de K_1C_1 à K_2C_2. On peut donc énoncer la propriété qui précède de la manière suivante :

Le point où la droite K_1K_2 *touche son enveloppe divise la droite qui joint les centres de courbure des enveloppes* E_1 *et* E_2 *en* K_1 *et* K_2 *dans le rapport des rayons de courbure correspondants.*

---

[1] *Voir* paragraphes 5, 14, 16, 20, 22.

4. *Courbes équidistantes.* — On sait que Γ est la courbe équidistante ([1]) de E_1 et E_2. Les développements qui précèdent donnent la construction de la tangente et du centre de courbure au point P de cette courbe. Si l'on mène de P les normales égales PK_1 et PK_2 aux courbes E_1 et E_2, la tangente Px en P à Γ est la bissectrice de l'angle K_1PK_2. Le centre de courbure s'obtient par la construction suivante :

La droite qui joint les centres de courbure C_1, C_2 *des courbes* E_1, E_2 *en* K_1, K_2 *rencontre la normale à la courbe équidistante en* L. *La perpendiculaire en* L *à* PL *rencontre* PC_1 *en* N, *celle en* N *sur* PC_1 *coupe* PL *au centre de courbure cherché.*

5. *Fibre moyenne* ([2]). — On considère les cordes K_1K_2 également inclinées sur deux courbes E_1, E_2, telles que les tangentes en K_1 et K_2 à ces courbes forment avec K_1K_2 un triangle isoscèle.

Le paragraphe 3 donne la construction du point où une telle corde K_1K_2 touche son enveloppe :

Le point où K_1K_2 *touche son enveloppe est son point d'intersection avec la droite qui joint les centres de courbure des courbes* E_1, E_2 *en* K_1 *et* K_2.

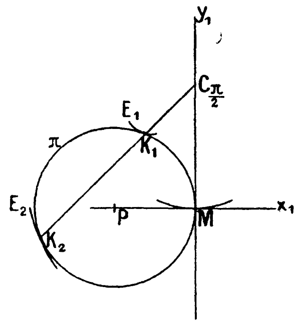
Le lieu Φ du milieu Q de K_1K_2 est, d'après la dénomination de M. d'Ocagne ([3]), la fibre moyenne des courbes E_1, E_2; ce lieu est la courbe orthoptique de Γ et du lieu de C_3. On déduit donc des résultats qui précèdent cette construction de la normale au point Q de la fibre moyenne :

([1]) LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 356.
([2]) LORIA-SCHÜTTE, *Ibid.*, p. 357.
([3]) *Cours de Géométrie descriptive*, Paris, 1896, p. 275.

La droite K_1K_2 *rencontre en* C_3 *la droite qui joint les centres de courbure en* K_1 *et* K_2 *des courbes données* E_1 *et* E_2 ; *les normales à ces courbes en ces points se rencontrent en* P ; *la droite qui joint* Q *au milieu de* PC_3 *est la normale cherchée.*

6. *Trajectoires orthogonales.* — Au lieu de rapporter le cercle π à la tangente et la normale de Γ en P, considérons un point M où le cercle rencontre une trajectoire orthogonale et prenons pour axes mobiles la tangente et la normale Mx_1, My_1 à cette trajectoire en

Fig. 2.



ce point (*fig.* 2). Soient s_1, ρ_1, $C_{\frac{\pi}{2}}$ l'arc, le rayon et le centre de courbure de cette trajectoire en M. Si l'on dérive l'équation

$$x^2+y^2+2\mu x=0$$

du cercle π, sous la forme

$$(y-\rho_1)\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}+\rho_1\frac{\partial f}{\partial s_1}=0,$$

on obtient pour l'équation de la corde de contact du cercle π avec son enveloppe

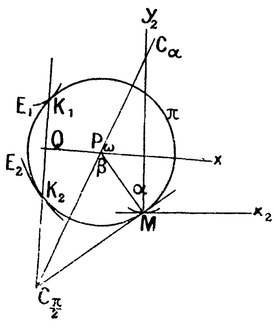
$$\rho_1 x\left(\frac{d\mu}{ds_1} - 1\right) + \mu y - \mu\rho_1 = 0.$$

Cette droite contient le centre de courbure $C_{\frac{\pi}{2}}$ de la trajectoire orthogonale en M. On retrouve donc cette propriété connue :

La corde de contact d'un cercle π avec son enveloppe est le lieu des centres de courbure des trajectoires orthogonales de la famille de cercles aux points où elles coupent le cercle π.

7. *Trajectoires d'angle α.* — Plus généralement, rapportons le cercle π à la tangente et la normale au point M où ce cercle rencontre une trajectoire d'angle α (*fig.* 3). Soient s_2, ρ_2, C_α l'arc, le rayon et le centre

Fig. 3.



de courbure de cette trajectoire en M. L'équation du cercle étant

$$x^2 + y^2 + 2R(x \sin\alpha - y \cos\alpha) = 0,$$

celle de la corde de contact du cercle avec son enveloppe sera

$$\begin{aligned}(y-\rho_2)(x+\mathrm{R}\sin\alpha)&\\ -x(y-\mathrm{R}\cos\alpha)+(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\frac{d\mathrm{R}}{ds_2}&=0.\end{aligned}$$

Cette corde coupe la tangente

$$y-x\operatorname{tang}\alpha=0$$

en M à π sur la droite

$$x(\rho_2-\mathrm{R}\cos\alpha)-\mathrm{R}y\sin\alpha+\rho_2\mathrm{R}\sin\alpha=0;$$

c'est la droite PC_α (1). L'intersection de la tangente à π en M avec la corde de contact de π avec son enveloppe est le centre de courbure de la trajectoire orthogonale au point M. On a donc cette construction du centre de courbure de la trajectoire d'angle α en M :

La tangente en M *à* π *rencontre la corde de contact de ce cercle avec son enveloppe en* $\mathrm{C}_{\frac{\pi}{2}}$; *le centre de courbure* C_α *est à l'intersection de* $\mathrm{PC}_{\frac{\pi}{2}}$ *et de la normale en* M *à la trajectoire considérée.*

Prenons maintenant pour axe polaire la tangente $\mathrm{P}x$ en P à la courbe Γ; désignons par a la distance PQ, par l le rayon vecteur PC_α, par ω l'angle de PC_α avec $\mathrm{P}x$, par β l'angle $\mathrm{C}_{\frac{\pi}{2}}\mathrm{PM}$. Nous avons alors

$$\mathrm{PC}_{\frac{\pi}{2}}=\frac{a}{\cos\omega},\qquad \cos\beta=\frac{\mathrm{R}\cos\omega}{a},$$

---

(1) Si l'on considère, pour une famille de courbes quelconques, les trajectoires qui passent par un point donné et qui correspondent à différentes valeurs de α, le lieu des centres de courbure de ces trajectoires en ce point est une droite (*voir* CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 148).

d'où l'on déduit, en considérant le triangle PMC_α,

$$l = \frac{R \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{R \sin\alpha}{\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha}$$
$$= \frac{a R \sin\alpha}{\cos\alpha \sqrt{a^2 - R^2 \cos^2\omega} - R \sin\alpha \cos\omega}.$$

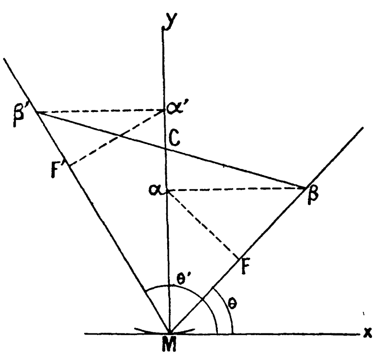
Lorsque le point M se déplace sur le cercle π, l'angle α restant constant, le lieu de C_α est donc une conique. On a donc le théorème suivant :

Les centres de courbure des trajectoires d'angle α d'une famille de cercles aux points où elles rencontrent l'un des cercles appartiennent à une même conique.

II. – Cercles dilatés ou contractés.

8. *Centre de courbure de l'ovale de Descartes.* — Soit M un point de l'ovale de Descartes définie par les

Fig. 4.



foyers F et F' et les constantes λ et λ'. En désignant FM et F'M (*fig.* 4) par r et r', on a donc

$$\lambda r + \lambda r' = a,$$

d'où, par dérivation,

$$\lambda \frac{dr}{ds} + \lambda' \frac{dr'}{ds} = 0,$$

ou, eu égard aux formules de Cesáro qui servent à exprimer que les points F et F' sont immobiles ([1]),

$$(12) \qquad \lambda \cos\theta + \lambda' \cos\theta' = 0,$$

θ et θ' désignant les angles de MF et MF' avec la tangente Mx en M à l'ovale. Par suite, la normale s'obtient en composant deux vecteurs proportionnels à λ et λ' dirigés de M vers F et F' (Poinsot). Les secondes formules de Cesáro donnent ensuite

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{d\theta'}{ds} = \frac{1}{\rho} - \frac{\sin\theta'}{r'},$$

où ρ désigne le rayon de courbure de l'ovale en M. On en déduit

$$(13) \qquad \lambda \sin\theta \frac{d\theta}{ds} + \lambda' \sin\theta' \frac{d\theta'}{ds} = \frac{\lambda \sin\theta}{\rho} + \frac{\lambda' \sin\theta'}{\rho} - \frac{\lambda \sin^2\theta}{r} - \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{r'}.$$

En dérivant (12) par rapport à s, on voit que le premier membre de (13) est nul. Donc

$$(14) \qquad \frac{\lambda \sin\theta + \lambda' \sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda \sin^2\theta}{r} + \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{r'}.$$

Comme λ et λ' sont proportionnels à $-\cos\theta'$ et $\cos\theta$, on a, par suite,

$$(15) \qquad \frac{\sin \mathrm{FMF'}}{\rho} = -\frac{\cos\theta' \sin^2\theta}{r} + \frac{\cos\theta \sin^2\theta'}{r'}.$$

Les perpendiculaires élevées en F et F' sur MF

([1]) Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 22.

et MF' rencontrent la normale en α et α', celles élevées en α et α' sur cette normale coupent FM et F'M en β et β'. On a alors, d'après (15),

$$\frac{\sin \mathrm{FMF}'}{\rho} = \frac{\sin \alpha' \mathrm{M} \beta'}{\mathrm{M}\beta} + \frac{\sin \alpha \mathrm{M} \beta}{\mathrm{M}\beta'},$$

ce qui exprime, en vertu d'un théorème élémentaire, que le centre de courbure recherché C appartient à la droite $\beta\beta'$. On a donc cette construction du centre de courbure de l'ovale en M :

Les perpendiculaires élevées en F *et* F' *sur* MF *et* MF' *rencontrent la normale en* α *et* α', *celles élevées en* α *et* α' *sur cette normale coupent* MF *et* MF' *en* β *et* β'. *Le centre de courbure est à l'intersection de* $\beta\beta'$ *avec la normale* (1).

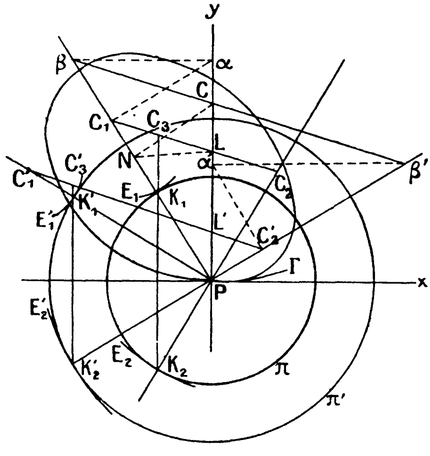
9. *Cercles dilatés ou contractés.* — Supposons qu'on dilate ou contracte dans un rapport donné $\frac{\lambda}{\lambda'}$ les cercles π par rapport à leurs centres et proposons-nous d'étudier les rapports entre les éléments de la figure 1 et ceux de la nouvelle figure (*fig.* 5) obtenue en considérant les cercles dilatés. Appelons R' le rayon du cercle dilaté π' déduit du cercle π, K'_1 et K'_2 les points de contact de π' avec les deux branches E'_1 et E'_2 de la courbe que ce cercle enveloppe quand son centre décrit la courbe Γ, Q' le milieu de $K'_1 K'_2$, C'_1, C'_2 les centres de courbure de E'_1 et E'_2 en K'_1 et K'_2, C'_3 le point où $K'_1 K'_2$ touche son enveloppe.

---

(1) M. R. Bouvaist a donné (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 347) une autre construction qui nous paraît moins simple. Elle est déduite directement de la relation (14) sans passer par la forme (15) qui donne lieu à une construction géométrique plus simple.

Il est aisé de voir que C_1C_2 est parallèle à $C'_1C'_2$.

Fig. 5.



Car, si l'on désigne l'angle K'_1Px par θ', on a

$$(16)\qquad -\frac{dR'}{ds} = \cos\theta' = \frac{\lambda}{\lambda'}\cos\theta,$$

relation dont l'importance pour l'étude des caustiques par réfraction est évidente. On a ensuite

$$(17)\qquad \sin\theta'\frac{d\theta'}{ds} = \frac{\lambda}{\lambda'}\sin\theta\frac{d\theta}{ds},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\theta'\frac{d\theta'}{ds} = \operatorname{tang}\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

En tenant compte de la valeur du coefficient angulaire de C_1C_2, trouvée au paragraphe 3, on voit que les droites C_1C_2 et $C'_1C'_2$ sont parallèles.

On considère, pour une position du cercle π, les points où les cercles π' correspondant à des dilatations quelconques touchent les enveloppes E'_1 et E'_2

qui leur correspondent. La droite qui joint les centres de courbure de ces enveloppes en ces points reste parallèle à une direction fixe.

D'autre part, on a

$$PQ' = -R'\frac{dR'}{ds} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 R\frac{dR}{ds} = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 PQ.$$

Or, si l'on désigne par L' le point analogue à L correspondant au cercle π',

$$CL' = \rho\cos^2\theta' = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 CL.$$

De là on déduira aisément que le point C'_3 appartient à la droite CC_3 et qu'on a

$$CC'_3 : CC_3 = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2.$$

Tous les points C'_3 *qui correspondent à une position du cercle* π *et à des rapports de dilatation quelconques appartiennent à une droite issue du centre de courbure* C *de la courbe* Γ *au point* P.

10. La comparaison des expressions de PC_1 et PC'_2 conduira à une importante généralisation des développements du paragraphe 2.

On a, d'après (6),

$$PC'_2 = \frac{\sin\theta'}{\frac{1}{\rho} - \frac{d\theta'}{ds}} = \frac{\frac{\lambda'}{\lambda}\sin^2\theta'}{\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \frac{\lambda'}{\lambda}\sin\theta'\frac{d\theta'}{ds}},$$

ou, en vertu de (17),

$$PC'_2 = \frac{\frac{\lambda'}{\lambda}\sin^2\theta'}{\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \sin\theta\frac{d\theta}{ds}}.$$

On en déduit

$$(18)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{\sin^2\theta'}{PC'_2} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{1}{\rho}\sin\theta' - \sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Or,

$$(19)\qquad \frac{\sin^2\theta}{PC_1} = \frac{\sin\theta}{\rho} + \sin\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

En ajoutant membre à membre les relations (18) et (19), on obtient

$$(20)\qquad \frac{\lambda\sin\theta + \lambda'\sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda\sin^2\theta}{PC_1} + \frac{\lambda'\sin^2\theta'}{PC'_2},$$

relation identique à (14).

Par conséquent, l'ovale de Descartes de foyers C_1 et C'_2, passant par M et correspondant aux constantes λ, λ', a en M même centre de courbure que la courbe Γ. D'où ce théorème qui généralise celui du paragraphe 2 :

Le centre de courbure de la première branche de l'enveloppe du cercle π et celui de la seconde branche de l'enveloppe du cercle dilaté π' sont les foyers d'une ovale de Descartes correspondant à des constantes dont le rapport est celui de la dilatation et qui a au point P *un contact du deuxième ordre avec la courbe* Γ.

On en déduit la construction qui sert à déduire le point C'_2 de C_1 :

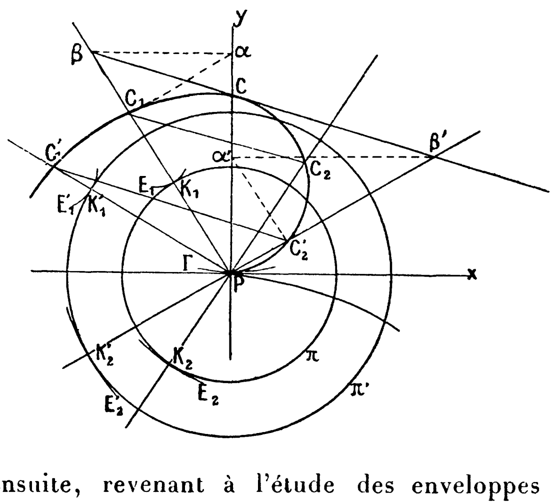
On élève en C_1 *sur* PC_1 *une perpendiculaire qui coupe* PC *en* α, *puis en* α *une perpendiculaire sur* $P\alpha$ *qui coupe* PC_1 *en* β; $C\beta$ *rencontre* K'_2P *en* β'. *On projette* β' *en* α' *sur* PC; C'_2 *est la projection de* α' *sur* K'_2P.

11. Ce résultat permet d'obtenir immédiatement, pour une position du cercle π, le lieu des points C'_1 et C'_2 correspondant aux cercles dilatés déduits du cercle π en lui faisant subir des dilatations quelconques. Ceci revient à chercher le lieu du second foyer d'une ovale de Descartes qui a pour foyer un point donné et a en un point donné un centre de courbure donné.

Si l'on reprend donc la figure 4, la droite $\beta'C$ étant fixe, on suppose β, α, F mobiles et l'on cherche le lieu de ce dernier point. Or, il est aisé de voir que αF enveloppe une parabole tangente à MC en M. Par suite, le lieu de F est la podaire d'une parabole par rapport à l'un de ses points, c'est-à-dire une cissoïde oblique. On a donc ce théorème :

Le lieu du second foyer d'une ovale de Descartes dont un foyer est un point fixe donné et qui a en un point donné un centre de courbure donné est une cissoïde oblique.

Fig. 6.



Ensuite, revenant à l'étude des enveloppes des cercles dilatés, on a la proposition suivante (*fig.* 6) :

Quand on considère, pour une position du cercle π, *les cercles* π' *correspondant à des rapports de dilatation quelconques, le lieu des centres de courbure de leurs enveloppes* E'_1 *et* E'_2 *aux points de contact avec ces cercles est une cissoïde oblique.*

12. *Lieu des points dont les distances à deux courbes sont dans un rapport constant.* — Quand on considère comme courbes données les courbes E_1 et E'_2, le lieu cherché est la courbe Γ; d'après ce qui précède, sa normale s'obtient en composant deux vecteurs dirigés suivant PC_1 et PC'_2 et proportionnels à λ et λ'.

En outre, on a pour son centre de courbure la construction suivante :

Les perpendiculaires élevées en C_1 *et* C'_2 *sur* PC_1 *et* PC'_2 *rencontrent la normale en* α *et* α', *celles élevées en* α *et* α' *sur cette normale coupent* PC_1 *et* PC'_2 *en* β *et* β'. *Le centre de courbure cherché est le point de rencontre de* $\beta\beta'$ *avec la normale.*

13. *Fibres moyennes.* — Comparons les deux fibres moyennes, lieux des points Q et Q'. D'après le paragraphe 5, leurs normales en ces points coupent PC aux projections T et T' de C_3 et C'_3 sur PC. On a, d'autre part,

$$Q'P : QP = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = C'_3C : C_3C = T'C : TC;$$

d'où ce théorème :

Si l'on considère sur la tangente en un point variable P *d'une courbe* Γ *deux points variables* Q *et* Q' *tels que le rapport* PQ : PQ' *soit constant, le centre de courbure de* Γ *en* P *divise dans le même rapport constant le segment que déterminent sur la* *normale de* Γ *en* P *les normales en* Q *et* Q' *aux lieux de ces points.*

On voit que cette proposition généralise une propriété bien connue des *développées intermédiaires* (1); ce cas s'obtient quand Γ est la développée du lieu de Q.

III. — Cas spéciaux remarquables.

14. *L'inversion.* — Quand la droite K_1K_2 également inclinée sur les courbes E_1 et E_2 passe par un point fixe C_3, ces courbes se correspondent dans une inversion de centre C_3. Le théorème du paragraphe **3** donne alors cette proposition d'ailleurs connue (2) :

Les centres de courbure en deux points correspondants de deux courbes inverses sont en ligne droite avec le centre d'inversion.

Si E_1 et E_2 appartiennent à une même courbe, celle-ci est anallagmatique, la déférente étant la courbe Γ. Les cercles π sont alors orthogonaux à un cercle de centre C_3. Or, si l'on dilate ces cercles dans le rapport constant $\frac{\lambda}{\lambda'}$ par rapport à leurs centres, on aura, en vertu du paragraphe **7**,

$$C_3C'_3 : C_3C = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2};$$

les lieux de C'_3 et de C sont donc homothétiques.

Une courbe anallagmatique est l'enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont les

(1) L. Braude, *Les coordonnées intrinsèques* (*Scientia*), p. 55.
(2) Cesáro, *Natürliche Geometrie*, p. 29.

centres appartiennent à la déférente; si l'on dilate ces cercles dans un rapport constant par rapport à leurs centres, les cordes de contact de ces cercles avec leurs enveloppes sont normales à une courbe homothétique à la déférente.

15. *Le rayon* R *est proportionnel à l'arc s.* — On a dans ce cas

$$(21)\qquad R = as, \qquad \cos\theta = -\frac{dR}{ds} = -a = -\frac{R}{s}.$$

Les développées de E_1 et E_2 sont donc les développoïdes d'angle $\pm\theta$ de la courbe Γ. D'où ce théorème :

Les développoïdes d'une courbe sont les développées des courbes qu'enveloppe un cercle ayant son centre sur la courbe donnée et dont le rayon varie proportionnellement à l'arc de cette courbe.

M. Braude a démontré [1] que l'enveloppe des cercles obtenus en contractant les cercles osculateurs d'une courbe dans un rapport constant par rapport à leurs centres, se compose de deux développoïdes de la courbe. Cette propriété résulte des considérations qui précèdent, si l'on prend pour courbe Γ la développée de la courbe considérée et si l'on tient compte de la relation (21).

Quant aux cercles osculateurs contractés par rapport au point de contact avec la courbe donnée, considérés aussi par M. Braude, la construction par points de leur enveloppe résulte du paragraphe 1 et de la propriété des développées intermédiaires, que décrivent leurs centres, rappelée au paragraphe 13.

---

(1) *Les coordonnées intrinsèques* (*Scientia*), p. 22.

16. *Cas d'un cercle π égal au cercle osculateur.* — Dans ce cas

$$PQ = -R\frac{dR}{ds} = -\rho\frac{d\rho}{ds} = -\rho',$$

ρ' désignant le rayon de courbure de la développée de Γ en C. On a donc ce théorème :

Quand on décrit, de chaque point d'une courbe comme centre, un cercle égal au cercle osculateur, la corde de contact de ce cercle avec son enveloppe a pour enveloppe la troisième développée de la courbe.

En outre, le théorème du paragraphe 3 donne la propriété suivante :

Les centres de courbure de l'enveloppe aux points où elle touche le cercle sont en ligne droite avec le troisième centre de courbure de Γ *en* P.

17. *Courbes isotèles.* — Lorsque la branche E_1 de l'enveloppe se réduit à un point fixe K_1, la courbe Γ est l'isotèle [1] de la courbe E_2 pour le point K_1. La fibre moyenne Φ (*fig.* 7) est alors homothétique à la courbe E_2 et Γ est l'antipodaire de Φ relativement à K_1. On retrouve donc ce théorème bien connu :

L'isotèle d'une courbe E_2 *par rapport à un point* K_1 *est homothétique à l'antipodaire de cette courbe par rapport à* K_1.

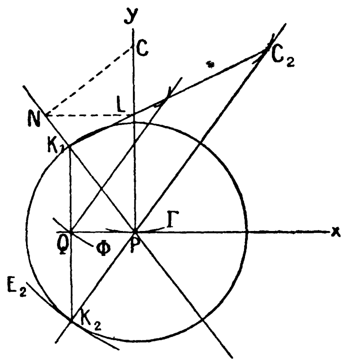
La méthode générale du paragraphe 4 donne la construction suivante du centre de courbure en un point Q de la podaire Φ d'une courbe Γ par rapport à un point K_1 :

---

[1] LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 356.

On projette le centre de courbure de Γ *au point* P *en* N *sur* K_1P, *puis* N *en* L *sur* PC; *la droite* K_1L *renferme le centre de courbure cherché.*

Fig. 7.



On voit aisément que cette construction ne diffère pas essentiellement de la construction classique ([1]).

Le théorème du paragraphe 2 prend, dans le cas actuel, la forme suivante :

Le lieu des centres des coniques dont un foyer est fixe et qui ont avec une courbe donnée un contact du deuxième ordre est la développée de la podaire de cette courbe.

Dans le cas où la courbe Γ est un cercle passant par le point K_1, on a donc cette propriété :

Le lieu des centres des coniques qui osculent un cercle donné et ont pour foyer un point fixe de ce cercle est une cardioïde.

([1]) CESÁRO, *Naturliche Geometrie*, p. 30. — L. BRAUDE, *Les coordonnées intrinsèques*, p. 84.

Si l'on observe que la contre-podaire focale d'une parabole est une autre parabole, on obtient, de même, ce théorème :

Le lieu des centres des coniques dont un des foyers est le foyer d'une parabole et qui ont avec la développée de cette parabole un contact du deuxième ordre est une parabole semi-cubique.

Dans le cas de la spirale logarithmique, on a le résultat suivant :

Le lieu des centres des coniques qui ont avec une spirale logarithmique un contact du deuxième ordre et qui ont le pôle pour foyer est une spirale logarithmique.

18. *Cas où les branches* E_1 *et* E_2 *appartiennent à une même courbe.* — On voit aisément que, dans ce cas, la courbe Γ est le *lieu des points doubles d'une famille de courbes parallèles;* ce sont les courbes parallèles à l'enveloppe des cercles π. Les propriétés de ce lieu Γ déduites des paragraphes **1** et **2** font l'objet de la question **1225** proposée par Cesáro dans *Mathesis* (1899, p. 152).

IV. — Cas ou l'une des branches de l'enveloppe est une droite.

19. *Construction du centre de courbure.* — Si la branche E_2 de l'enveloppe est une droite δ, la branche E_1 peut être considérée comme étant l'enveloppe de la symétrique de δ par rapport aux tangentes de Γ, ou le lieu des foyers des paraboles qui touchent Γ et qui ont δ pour directrice.

La branche E_2 étant une droite, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Dès lors, l'expression de PC_1 devient

$$PC_1 = \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\rho} + \frac{d\theta}{ds}} = \frac{\sin\theta}{\frac{2}{\rho}} = \frac{1}{2} PC \sin\theta.$$

On a donc la construction suivante du centre de courbure de l'enveloppe :

Le centre de courbure de E_1 *en* K_1 *est la projection du milieu du rayon de courbure de* Γ *en* P *sur la normale en* K_1 *à* E_1.

Le théorème du paragraphe 2 donne ensuite la propriété suivante :

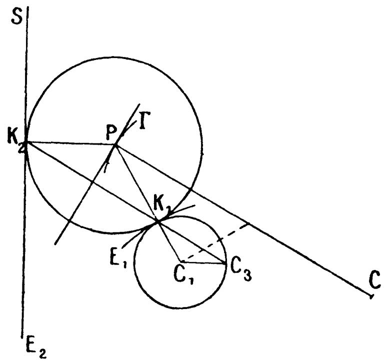
La développée de E_1 *est le lieu des foyers des paraboles dont l'axe est perpendiculaire à* δ *et qui ont avec* Γ *un contact du deuxième ordre.*

Les enveloppes E_1 qui correspondent à des droites δ parallèles sont des courbes parallèles.

20. Dans le cas qui nous occupe, le point C_3 où la corde K_1K_2 touche son enveloppe jouit d'une propriété intéressante. En vertu du paragraphe 3, ce point se trouve sur la perpendiculaire menée par C_1 à δ puisque cette perpendiculaire renferme le centre de courbure de la courbe E_2 en K_2. Les triangles K_1PK_2 et $K_1C_1C_3$ (*fig.* 8) étant semblables, C_1C_3 est égal à C_1K_1 et le point C_3 appartient au cercle osculateur de E_1 en K_1. On a donc ce théorème :

Si l'une des branches de l'enveloppe est une *droite, la corde de contact du cercle variable avec*

Fig. 8.



son enveloppe touche son enveloppe sur le cercle osculateur de l'autre branche.

21. Remarquons que la tangente en C_3 au lieu de ce point est la droite C_3K_1; comme C_1C_3 est parallèle à une direction fixe et est égal au rayon de courbure de la courbe E_1 en K_1, on peut énoncer la propriété que nous venons de trouver sous la forme suivante :

Si, par le centre de courbure correspondant à chaque point d'une courbe, on mène, parallèlement à une direction fixe, un segment égal au rayon de courbure en ce point, la tangente à l'extrémité de ce segment au lieu de ces extrémités passe par le point correspondant de la courbe.

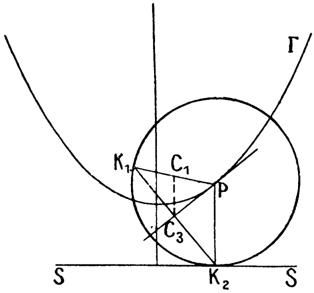
C'est un théorème dû à M. d'Ocagne ([1]).

22. Une autre conséquence du théorème du paragraphe 3 est la construction bien connue du centre de

([1]) *Nouvelles Annales*, 1903, p. 46; 1915, p. 6.

courbure de la *syntractrice*. Considérons (*fig.* 9) comme courbe Γ une chaînette ayant δ pour base. La branche E_1 de l'enveloppe est le lieu du symétrique,

Fig. 9.



par rapport à la tangente en un point P de Γ, de la projection K_2 de ce point sur δ; c'est la syntractrice. La normale en K_1 à cette courbe est la droite K_1P. Or, le point C_3 où la corde de contact du cercle variable avec la droite δ et la syntractrice touche son enveloppe est le milieu de K_1K_2; de plus, la perpendiculaire menée de C_3 à δ contient le centre de courbure de E_1 en K_1. On retrouve donc cette construction donnée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1891, p. 96) :

Le centre de courbure C_1 *de la syntractrice en* K_1 *est le milieu de* K_1P.

23. Considérons encore le cas où la courbe Γ est une logarithmique; alors la sous-tangente de Γ relative à δ est constante. Il en résulte que le segment de la tangente en K_1 à la branche E_1 de l'enveloppe, compris entre K_1 et δ, est constant. La courbe E_1 est donc alors une tractrice. On a donc ce théorème :

La tractrice est l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une logarithmique et qui en touche l'asymptote.

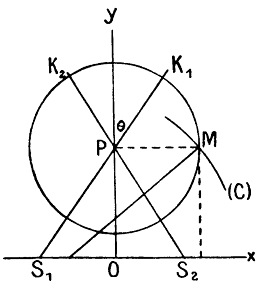
On peut l'énoncer sous la forme suivante bien connue :

La caustique par réflexion d'une logarithmique pour des rayons perpendiculaires à l'asymptote est une chaînette ([1]).

V. — Cas ou le centre du cercle décrit une droite. Développantes d'astroïdes.

24. Projetons (*fig.* 10) un point variable M d'une courbe (C) en P sur une droite Γ et considérons le cercle π de centre P, de rayon PM. Prenons Γ pour

Fig. 10.



axe des y et la perpendiculaire élevée sur Γ en un point O pour axe des x. Si l'on se reporte aux notations antérieurement utilisées, x joue le rôle de R, y celui de s. Nous aurons donc

$$\cos\theta = -\frac{dR}{ds} = -\frac{dx}{dy}.$$

([1]) Loria-Schütte, *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 306.

Dès lors, si nous désignons par ξ et η les coordonnées des points K_1 et K_2 où le cercle π touche son enveloppe, nous avons

$$(22)\qquad \begin{cases} \xi = \phantom{y +{}} x\sin\theta = \pm x\sqrt{1-\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}, \\ \eta = y + x\cos\theta = y - x\dfrac{dx}{dy}. \end{cases}$$

Inversement, on peut trouver une courbe (C) telle que l'enveloppe considérée soit une courbe donnée. La normale au point K_1 de l'enveloppe a pour équation

$$Y - \eta = -\frac{1}{\eta'}(X - \xi).$$

On en déduit

$$OP = \eta + \frac{\xi}{\eta'}, \qquad K_1P = \sqrt{\xi^2 + \frac{\xi^2}{\eta'^2}} = \frac{\xi}{\eta'}\sqrt{1+\eta'^2}.$$

On a donc

$$x = \frac{\xi}{\eta'}\sqrt{1+\eta'^2}, \qquad y = \eta + \frac{\xi}{\eta'}.$$

Si deux courbes (C) sont déduites l'une de l'autre par une translation parallèle à Ox, les enveloppes correspondantes sont des courbes parallèles.

25. *Construction des points de contact du cercle π avec son enveloppe.* — Soit S_1 le point où la normale en K_1 à l'enveloppe coupe l'axe Ox. On a

$$S_1P = \frac{OP}{\cos\theta} = -\frac{y}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

Le segment S_1P est donc égal à la sous-normale de la courbe (C) au point M. On a donc la construction suivante des points K_1 et K_2 :

De P *comme centre on décrit, avec la sous-normale de* (C) *en* M *comme rayon, un cercle qui coupe* Ox *en* S_1 *et* S_2; *les points* K_1 *et* K_2, *sont à l'intersection de* π *avec les droites* PS_1 *et* PS_2.

Ces intersections donnent lieu à quatre points; mais il suffit, pour trouver les points K_1 et K_2, de remarquer que l'angle θ est aigu ou obtus suivant que x décroît ou croît avec y.

26. Si l'on applique les équations (22) au cas d'une parabole du second degré

$$y^2 = 2p(x + \alpha),$$

on obtient pour l'enveloppe les équations paramétriques

$$\xi = \mp \left(\frac{y^2}{2p} - \alpha\right)\sqrt{1 - \frac{y^2}{p^2}},$$

$$\eta = y - \left(\frac{y^2}{2p} - \alpha\right)\frac{y}{p},$$

où y est le paramètre. Ces équations représentent une sextique. Les enveloppes qui correspondent aux différentes valeurs de α sont des courbes parallèles.

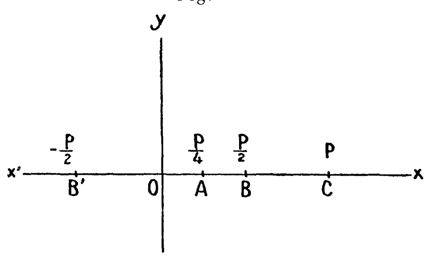
Ces courbes méritent une attention spéciale. En effet, dans le cas de la parabole, la sous-normale de (C) étant constante, l'enveloppe est, d'après la construction indiquée au paragraphe précédent, une *développante d'astroïde*.

On obtient donc cette définition nouvelle des développantes d'astroïdes :

Si l'on projette un point variable M *d'une parabole en* P *sur une perpendiculaire à l'axe, le cercle de centre* P *et de rayon* PM *enveloppe une développante d'astroïde.*

27. On sait que cette famille de développantes comprend une astroïde droite et ses courbes parallèles, parmi lesquelles il y a des croix de Malte, des astroïdes obliques et des parastroïdes. Considérons la parabole $y^2 = 2px$ de foyer B (*fig.* 11); marquons sur l'axe xOx' les points A, B, C, B' d'abscisses $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{2}$, p, $-\frac{p}{2}$. Si l'on fait subir à la parabole une translation parallèle

Fig. 11.



à Ox, on aura pour enveloppes les courbes suivantes, d'après les positions du sommet de la parabole :

En O : demi-croix de Malte, avec Oy comme tangente au point autotangentiel;

De O à A : astroïdes obliques;

En A : astroïde droite;

De A à B : astroïdes obliques;

En B : demi-croix de Malte, avec Ox comme tangente au point autotangentiel;

De B à C : parastroïdes;

En C : courbe limite (*sextique ovale*) entre les développantes à rebroussements et celles sans rebroussements;

Au delà de C : parastroïdes.

Quand la parabole subit une translation dans le sens de Ox', toutes les enveloppes sont des parastroïdes;

dans le cas où le sommet est en B', on a encore une courbe limite ([1]).

VI. — Les caustiques.

28. *Caustiques par réfraction.* — La relation (16) montre que la développée de E_2 est la caustique par réfraction de la courbe Γ pour des rayons tangents à la développée de E_1, l'indice de réfraction étant égal au rapport de dilatation des cercles. C'est le théorème de Gergonne ([2]) :

La courbe enveloppe des rayons incidents et la caustique par réfraction d'une courbe Γ *produite par ces rayons sont les développées des enveloppes de deux familles de cercles* π *et* π' *ayant leurs centres sur la courbe* Γ *et dont les uns* π' *sont déduits des autres* π *par une dilatation constante.*

Les longueurs l_1 et l_2 des rayons incidents et réfractés, comprises entre leurs points de contact avec leurs enveloppes et la courbe Γ, sont liées par la relation

$$\frac{\lambda \sin\theta + \lambda' \sin\theta'}{\rho} = \frac{\lambda \sin^2\theta}{l_1} + \frac{\lambda' \sin^2\theta'}{l_2} \quad ([3]).$$

Les développements du paragraphe **10** permettent de construire la caustique par points :

La normale à l'enveloppe du rayon incident au point où ce rayon touche son enveloppe rencontre

---

([1]) C'est le cas où Γ est la corde focale principale; il a été considéré par M. Barisien (question 1948 de *Mathésis*, 1913, p. 280). Le fait que cette sextique est une développante d'astroïde ne semble pas avoir été remarqué.

([2]) *Sur les caustiques planes* (*Annales de Math.*, 1824-1825).

([3]) Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, Berlin, 1833, p. 467.

en α *celle de la courbe* Γ *au point d'incidence* P; *la perpendiculaire élevée en* α *sur cette dernière normale coupe le rayon incident en* β. *La droite qui joint* β *au centre de courbure* C *de* Γ *en* P *coupe le rayon réfracté en* β'; *on projette* β' *en* α' *sur* PC; *la projection de* α' *sur le rayon réfracté est le point où ce rayon touche la caustique.*

Dans le cas de rayons incidents parallèles, cette construction se simplifie :

On mène par C, *parallèlement à ces rayons, une droite coupant le rayon réfracté en* β'; *on projette* β' *en* α' *sur la normale à* Γ. *La projection de* α' *sur le rayon réfracté est un point de la caustique.*

En outre, on a ce théorème général :

Les points correspondants de l'enveloppe des rayons incidents et de la caustique par réfraction sont les foyers d'une ovale de Descartes correspondant à des constantes dont le rapport est l'indice de réfraction et qui a, au point d'incidence, un contact du deuxième ordre avec Γ.

Enfin, d'après le paragraphe 9, on a encore cette propriété :

Si l'indice de réfraction varie, le lieu des points des caustiques produites correspondant à un même rayon incident est une cissoïde oblique.

29. *Caustiques par réflexion.* — Dans ce cas, la construction de la caustique par points résulte du paragraphe 2 :

On projette le centre de courbure C *de la courbe* *réfléchissante* Γ *au point d'incidence en* N *sur le rayon incident; on projette* N *en* L *sur* PC. *La droite qui joint le point où le rayon incident touche son enveloppe au point* L *rencontre le rayon réfléchi en un point de la caustique.*

Quand on considère un faisceau de rayons incidents, on a, en vertu des propriétés des courbes isotèles (§ 17), le théorème suivant :

La caustique par réflexion d'une courbe Γ, *pour un faisceau de rayons incidents issus d'un point* K_1, *est homothétique à la développée de la podaire de* Γ *par rapport à* K_1.

On peut ainsi considérer la *cardioïde* comme caustique d'un *cercle*, la *parabole de Neil* comme caustique d'une autre parabole de Neil, la *spirale logarithmique* comme caustique d'une autre spirale logarithmique.

Si les rayons incidents sont parallèles, on a (§ 19) cette construction bien connue du point où un rayon réfléchi touche la caustique :

Le point de contact d'un rayon réfléchi avec la caustique s'obtient en projetant sur ce rayon le milieu du rayon de courbure de la courbe réfléchissante au point d'incidence.

Ce cas correspond à celui d'une famille de cercles dont l'une des branches de l'enveloppe est une droite perpendiculaire à la direction des rayons incidents.

VII. — Sur les familles de sphères.

30. Si l'on prend pour axes de coordonnées la tangente, la binormale et la normale principale en un

point P d'une courbe gauche Γ et si l'on appelle ρ et r les rayons de courbure et de torsion en ce point, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point (x, y, z) de l'espace soit fixe sont ([1])

$$(23)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{z}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \qquad \frac{dz}{dr} = -\frac{x}{\rho} - \frac{y}{r}.$$

D'autre part, l'enveloppe de la surface

$$f(x, y, z, s) = 0$$

s'obtient en éliminant s entre cette équation et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ou, eu égard aux conditions (23),

$$(24)\qquad \left(\frac{z}{\rho} - 1\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Ceci posé, considérons la sphère π d'équation

$$(25)\qquad f(x, y, z, s) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Pour cette sphère, l'équation (24) devient

$$x + R\frac{dR}{ds} = 0.$$

La sphère π touche son enveloppe suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente en P à la courbe gauche Γ.

31. Posons

$$(26)\qquad -\frac{dR}{ds} = \cos\theta.$$

Le cône Σ qui projette de P le cercle de contact de

([1]) CESÁRO, *Natürliche Geometrie*, p. 156.

la sphère avec son enveloppe a pour équation

$$y^2 + z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2\theta = 0. \tag{27}$$

Cherchons les équations de la courbe le long de laquelle ce cône touche son enveloppe. En dérivant (27) sous la forme (24), on obtient

$$\begin{aligned} -\left(\frac{z}{\rho} - 1\right) x \operatorname{tang}^2\theta + \frac{zy}{r} \\ -\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right) z - x^2 \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{ds} = 0, \end{aligned}$$

ou, toutes réductions faites,

$$x \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{ds} + \frac{z}{\rho} - \sin^2\theta = 0. \tag{28}$$

Cette équation représente le plan de la conique le long de laquelle le cône Σ touche son enveloppe. Considérons, d'autre part, le plan du cercle de contact de π avec son enveloppe

$$x - R\cos\theta = 0. \tag{29}$$

La droite le long de laquelle ce plan touche son enveloppe appartient au plan dont l'équation s'obtient en dérivant l'équation (29) sous la forme (24). On trouve ainsi

$$\frac{z}{\rho} - 1 - \frac{dR}{ds}\cos\theta + R\sin\theta \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

ou, en tenant compte de (26),

$$z = \rho \sin\theta \left(\sin\theta - R\frac{d\theta}{ds}\right). \tag{30}$$

Or, on voit aisément que le plan (30) contient la droite représentée par les équations (28) et (29). Nous avons ainsi cette extension à l'espace du théorème du paragraphe 3 :

Le plan du cercle de contact d'une sphère π *avec son enveloppe touche son enveloppe suivant une droite* Δ *qui appartient au plan de la conique* S *suivant laquelle le cône qui projette ce cercle du centre de la sphère touche son enveloppe.*

32. Les équations (7) et (28) étant identiques, les propriétés des points C_1 et C_2 donnent lieu à des propriétés identiques des sommets A_1 et A_2 de la conique S; ces sommets appartiennent au plan osculateur de Γ en P.

Les sommets de la conique S *sont les foyers d'une conique située dans le plan osculateur de la courbe gauche et ayant en* P *même centre de courbure que cette courbe.*

Considérons encore les familles de sphères π' déduites des sphères π par une dilatation constante; envisageons pour ces sphères π' les divers éléments S', A'_1, A'_2, Δ' analogues aux éléments S, A_1, A_2, Δ relatifs aux sphères π. Si l'on considère une position de la sphère π et les sphères π' concentriques, correspondant à diverses valeurs du rapport de dilatation, on a, en vertu de l'analogie des équations (7) et (28), les propriétés suivantes :

Le plan de la conique S' *se déplace parallèlement à lui-même; les sommets* A'_1 *et* A'_2 *décrivent dans le plan osculateur de* Γ *en* P *une cissoïde oblique; la droite* Δ' *se deplace dans un plan qui contient le centre de courbure de* Γ *en* P.

33. Si l'on suppose que la sphère π reste orthogonale à une sphère fixe de rayon k, l'enveloppe est une surface anallagmatique. On a alors, en désignant par (α, β, γ) les coordonnées du centre de la sphère fixe par rapport au trièdre fondamental de Γ en P,

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k^2,$$

d'où

$$-R\frac{dR}{ds} = -\left(\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \beta\frac{d\beta}{ds} + \gamma\frac{d\gamma}{ds}\right) = \alpha,$$

puisque α, β, γ satisfont aux conditions (23). Le plan du cercle de contact de la sphère π avec son enveloppe passe donc par le centre de la sphère fixe, centre d'inversion. On a alors, d'après le théorème du paragraphe 31, la propriété suivante :

Si la sphère π reste orthogonale à une sphère fixe, elle enveloppe une surface anallagmatique; le cône Σ qui projette du centre de la sphère le cercle de contact de celle-ci avec cette surface touche son enveloppe suivant une conique S *dont le plan passe toujours par le centre d'inversion.*

Ce théorème est à comparer à la propriété des centres de courbure aux points correspondants de deux courbes inverses, retrouvée au paragraphe 14.

34. Si le rayon R est proportionnel à l'arc s, l'angle θ est constant; on trouve alors cette propriété, qui peut être considérée comme une extension à l'espace de la propriété fondamentale des développoïdes :

Si l'on considère un cône de révolution d'angle constant ayant pour axe la tangente à une courbe gauche Γ *en un point variable* P, *ce cône touche son enveloppe suivant une hyperbole dont les sommets sont les projections du centre de courbure de* Γ *en* P *sur les génératrices de ce cône situées dans le plan osculateur.*