I.-J. SCHWATT

Note sur la sommation d'une série

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 203-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__203_0>

[D2bγ]

NOTE SUR LA SOMMATION D'UNE SÉRIE;

PAR M. I.-J. SCHWATT,
Professeur à l'Université de Pensylvanie,
Philadelphia, Pa. (U. S. A.).

(*Traduit de l'anglais.*)

Il s'agit de trouver la somme indiquée par la formule

$$(1) \qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a+kh},$$

où a et h sont des entiers positifs.

I. Soit

$$a = nh;$$

alors

$$(2) \qquad \begin{aligned} S &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\log 2;$$

donc

$$(3) \qquad S = \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \log \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \sum_{k=1}^{\frac{a}{h}-1} (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Si $a = h = 1$,

$$(4)\qquad S = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$

II. Soit

$$a = b + nh \qquad (b < h);$$

alors

$$(5)\quad S = (-1)^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{b+kh}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\frac{1}{a-kh}\right]$$

$$= (-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{a}{h}\right]}(-1)^{k-1}\frac{1}{a-kh}.$$

Si $a < h$, la dernière sommation se réduit à zéro.

Soit maintenant

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{b+kh} = S_1$$

et

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{r^{b+kh}}{b+kh} = S_2,$$

alors

$$S_1 = \lim_{r=1} S_2.$$

De (7) s'ensuit la relation

$$(8)\qquad \frac{dS_2}{dr} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r^{b+kh-1} = \frac{r^{b-1}}{1+r^h},$$

et, par conséquent,

$$(9)\qquad S_2 = \int_0^r \frac{r^{b-1}}{1+r^h}\,dr.$$

Soit

$$(10)\qquad \frac{r^{b-1}}{1+r^h} = \sum_{k=1}^{h} \frac{A_k}{r-s_k}, \qquad \text{où} \qquad s_k = e^{\frac{2k-1}{h}\pi i}$$

Nous avons alors

$$(11)\qquad A_k = s_k^{b-1}\left(\frac{r-s_k}{1+r^h}\right)_{r=s_k} = s_k^b \frac{1}{hs_k^h}.$$

Mais

$$s_k^h = 1;$$

donc

$$(12)\qquad A_k = -\frac{s_k^b}{h}$$

et

$$(13)\qquad \frac{r^{b-1}}{1+r^h} = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\frac{s_k^b}{r-s_k}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\frac{s_k^b}{s_k-r}.$$

De là

$$(14)\qquad S_2 = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} s_k^b \log\frac{s_k-r}{s_k}$$

et

$$(15)\qquad S_1 = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} s_k^b \log(1-s_k^{-1}),$$

$$(16)\qquad S = -\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}\left[\cos(2k-1)\frac{b\pi}{h} + i\sin(2k-1)\frac{b\pi}{h}\right] \times \log\left[1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{h} + i\sin(2k-1)\frac{\pi}{h}\right],$$

$$(17)\qquad S = -\frac{1}{h}\left[\sum_{k=1}^{h}\cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}\log\left(2\sin\frac{2k-1}{2h}\pi\right) - \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2k-1}{h}\right)\sin\frac{2k-1}{h}b\pi\right].$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{h} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{h} \sin(2k-1)\frac{b\pi}{h} = 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{h} (2k-1)\sin(2k-1)\frac{b\pi}{h} = -\frac{h}{\sin\frac{b\pi}{h}},$$

on a donc

$$(18)\quad S_1 = \frac{\pi}{2h\sin\frac{b\pi}{h}} - \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}\log\sin\frac{2k-1}{2h}\pi,$$

formule où $\left[\frac{h}{2}\right]$ représente la partie entière de $\frac{h}{2}$.

De là

$$(19)\quad S = (-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]}\frac{\pi}{2h\sin\frac{b\pi}{h}} - \frac{2(-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]}}{h}\sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1)\frac{b\pi}{h}$$

$$\times \log\sin\frac{2k-1}{2h}\pi + \sum_{k=1}^{\left[\frac{a}{h}\right]} (-1)^{k-1}\frac{1}{a-kh}.$$

1° Si $a=1$, $h=2$, $b=1$, $\left[\frac{a}{h}\right]=0$,

$$(20)\quad S = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{1} \cos\frac{2k-1}{2}\pi\log\sin\frac{2k-1}{4}\pi$$

$$= \frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\log\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

2° Si $a = 1$, $h = 3$,

$$(21)\quad S = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{3}} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{1}\cos\frac{2k-1}{3}\pi\log\sin\frac{2k-1}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\log 2.$$

3° Si $a = 1$, $h = 4$,

$$(22)\quad S = \frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\cos\frac{2k-1}{4}\pi\log\sin\frac{2k-1}{8}\pi$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(\text{tang}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1).$$

4° Si $a = 1$, $h = 5$,

$$(23)\quad S = \frac{\pi}{10\sin\frac{\pi}{5}} - \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{2}\cos\frac{2k-1}{5}\pi\log\sin\frac{2k-1}{10}\pi$$

$$= \frac{\pi}{10}\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}} - \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}\log\sin\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\log\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{2+\frac{2}{3}\sqrt{5}} + (1-\sqrt{5})\log 2 + \sqrt{5}\log(1+\sqrt{5})\right].$$

5° Si $a = 1$, $h = 6$,

$$(24)\quad S = \frac{\pi}{12\sin\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{2k-1}{6}\pi\log\sin\frac{2k-1}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\cos\frac{1}{6}\pi\log\text{tang}\frac{1}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}).$$

6° Si $a = 1$, $h = 8$,

$$(25)\quad S = \frac{\pi}{16\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k-1}{8}\pi\log\sin\frac{2k-1}{16}\pi$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{8}\pi\log\operatorname{tang}\frac{1}{16}\pi + \sin\frac{1}{8}\pi\log\operatorname{tang}\frac{3}{16}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\log\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2(2-\sqrt{2})}-1\right)\right]\right.$$

$$\left.+\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \log\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)+1\right]\right\}.$$

Les résultats des exemples ci-dessus peuvent aussi être obtenus par la méthode suivante. Prenons le cas où $a = 1$ et $h = 8$, c'est-à-dire

$$(26)\qquad S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{8k+1}.$$

Soit

$$(27)\qquad S_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{r^k}{8k+1}.$$

Alors

$$S = \lim_{r=1} S_1.$$

Si u_k représente le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme de S_1, alors

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = -r\frac{8k-7}{8k+1}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(8k+1)u_k = -r\sum_{k=0}^{\infty}(8k+1)u_k + 1$$

ou

$$(28)\qquad 8r(1+r)\frac{dS_1}{dr} + (1+r)S_1 = 1.$$

Résolvant cette équation différentielle en S_1, nous obtenons

$$S_1 = \frac{1}{8 r^{\frac{1}{8}}} \int_0^{r} \frac{dr}{r^{\frac{7}{8}}(1+r)} \tag{29}$$

$$= \frac{1}{r^{\frac{1}{8}}} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}$$

et

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}. \tag{30}$$

Le résultat obtenu par l'évaluation de cette intégrale est le même que celui qu'indique la formule (25).