Nouvelles annales de mathématiques

M.-F. Egan

Note sur les quartiques gauches unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 218-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__218_1>

[$M^3$6a]

NOTE SUR LES QUARTIQUES GAUCHES UNICURSALES;

PAR M. M.-F. EGAN.

Je me propose dans cette Note d'établir, pour la courbe rationnelle générale du quatrième ordre, des théorèmes analogues à ceux que M. Ch. Michel a donnés, dans ce Recueil ([1]), pour une classe de ces courbes.

Rappelons d'abord quelques propriétés de ces courbes ([2]). Les quatre coordonnées x_i d'un point de la courbe étant proportionnelles à quatre polynomes quartiques en un paramètre t, la condition que les points t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) soient dans un même plan s'exprime sous la forme

$$(1) \qquad f_0\sigma_4 + 4f_1\sigma_3 + 6f_2\sigma_2 + 4f_3\sigma_1 + f_4 = 0,$$

les f_i étant des constantes, et σ_i désignant la somme des produits des t pris i à la fois. Autrement dit, les points donnés par l'équation

$$a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4 = a(t) = 0$$

sont dans un même plan lorsque les formes $a(t)$ et $f(t)$ sont apolaires l'une à l'autre, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(2) \qquad a_0 f_4 - 4a_1 f_3 + 6a_2 f_2 - 4a_3 f_1 + a_4 f_0 = 0.$$

Soit $\Sigma\lambda_i x_i = 0$ l'équation de ce plan. On obtient la forme $a(t)$ en substituant aux x_i les polynomes en t qui leur sont proportionnels. Les a_i sont donc des fonctions linéaires de λ_i, et l'on peut considérer les a_i comme des coordonnées du plan (a). Le nombre effectif de ces coordonnées se réduit à quatre en vertu de l'identité (2).

Supposons par exemple que le plan (a) soit un plan osculateur de la courbe. La forme $a(t)$ a trois racines

---

([1]) *Nouvelles Annales*, 1907, p. 289.

([2]) *Voir*, par exemple, H.-W. RICHMOND, *On rational Space Quartic Curves* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. XIX). On y trouvera une bibliographie tres complète.

égales, on a donc

$$I(a) = a_0 a_4 - 4 a_1 a_4 + 3 a_2^2 = 0,$$

$$J(a) = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 = 0.$$

Il s'ensuit que les plans osculateurs touchent la quadrique (I) et la surface (J) de troisième classe.

L'équation fondamentale $f(t) = 0$ donne les quatre points de surosculation. Les racines du covariant sextique de f, soit $\gamma(t)$, se répartissent en trois couples. Si l'on désigne par *corde principale* une corde par laquelle passent les plans osculateurs en ses deux extrémités, les racines de $\gamma(t)$ donnent les extrémités des trois cordes principales de la courbe. Ces cordes se rencontrent en un point, qu'on appelle le *centre* de la courbe; on donne aussi aux trois cordes le nom d'*axes*.

Ces points étant posés, voici les théorèmes dont il est question :

1° *Soient* A *un point de la courbe et* C *le centre. Par la droite* AC *on peut mener quatre plans tangents à la courbe, en dehors du plan qui passe par* C *et par la tangente en* A. *Les points de contact de ces quatre plans sont dans un même plan* π *passant par* C.

2° *Lorsque* A *se déplace sur la courbe, le plan* π *enveloppe la quadrique* (I) *inscrite dans la développable.*

Pour les démontrer, transformons le paramètre (t) homographiquement, de façon que $f(t)$ prenne la forme canonique

$$f(t) = t^4 + 6ct^2 + 1.$$

Les paramètres des extrémités des axes seront alors

$$(0, \infty), \quad (\pm 1), \quad (\pm i).$$

Prenons pour tétraèdre de référence le trièdre des axes et un plan quelconque. On peut alors écrire les équations de la courbe sous la forme

$$\frac{x_1}{t^3 - t} = \frac{x_2}{t^3 + t} = \frac{x_3}{t^4 - 1} = \frac{x_4}{\varphi(t)}. \tag{3}$$

En effet, la courbe rencontre la face $x_1 = 0$ du tétraèdre de référence aux points $t = 0, \infty, 1, -1$; et ainsi de suite.

La condition (2), pour que les points donnés par $a(t) = 0$ soient dans un même plan, devient

$$a_0 + a_4 + 6 c a_2 = 0.$$

Pour que l'équation de ce plan soit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0.$$

il faut et il suffit, d'après les équations (3), qu'on ait

$$a_0 + a_4 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad \ldots. \tag{4}$$

Soit t_0 le paramètre du point A, et considérons le plan (a), qui passe par A, qui touche la courbe au point $t = \theta$ et qui la rencontre encore au point $t = \theta'$. Le polynome $a(t)$ devient

$$a(t) = (t - t_0)(t - \theta')(t - \theta)^2.$$

Pour que ce plan passe par le centre, il faut, d'après les équations (4), que

$$\theta^2 t_0 \theta' + 1 = 0, \qquad \theta'(2\theta + t_0) + \theta^2 + 2\theta t_0 = 0,$$

d'où l'équation en θ

$$b(\theta) = \theta^4 t_0 + 2\theta^3 t_0^2 - 2\theta - t_0 = 0.$$

qui donne les points de contact des quatre plans tangents menés par AC à la courbe, en dehors de celui qui passe par C et par la tangente en A.

On a

$$b_0 + b_4 = 0, \qquad b_2 = 0;$$

donc ces quatre points sont dans un plan π passant par le centre. On a aussi

$$I(b) = -t_0^2 + t_0^2 = 0,$$

d'où il suit que le plan π touche la quadrique (1).

Lorsque les tangentes de la courbe font partie d'un complexe linéaire, il y a une infinité de centres, situés sur une corde IJ. Par un point quelconque de IJ on peut mener deux cordes principales, qui constituent avec IJ un système de trois axes. C'est le cas que M. Michel a traité.

Revenons au cas général. Les plans π enveloppent un cône quadrique de sommet C. Parmi ces plans se trouvent les plans osculateurs aux extrémités des axes : en effet, ces plans passent par C et sont tangents à la quadriqne (I). Si l'on projette la courbe du point C sur un plan quelconque, on obtient une quartique plane rationnelle à trois points doubles d'inflexion. On retrouve ainsi les théorèmes de Laguerre signalés par M. Michel (1).

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1907, p. 296.