NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-N. BARISIEN

Égalité entre deux arcs d'une ellipse et d'un limaçon de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 225-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__225_1>

[$O^1 2c$]

ÉGALITÉ ENTRE DEUX ARCS D'UNE ELLIPSE ET D'UN LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

I.

Considérons tout d'abord l'ellipse d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

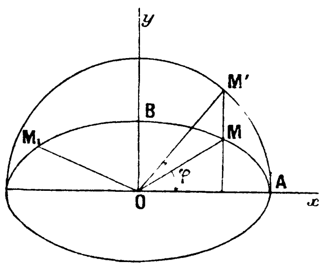
Soit M un point sur l'ellipse dont l'angle d'anomalie excentrique est φ. Les coordonnées de ce point sont

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = b\cos\varphi\, d\varphi.$$

Fig. 1.



On a donc pour l'élément d'arc d'ellipse

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Or, le demi-diamètre conjugué à OM, OM_1 a pour valeur

$$OM_1 = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = OM_1.$$

Si A est le sommet (a, o) l'arc AM de l'ellipse est donné par la formule

$$(1) \qquad s_{AM} = \int_0^\varphi \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

II.

Considérons maintenant le limaçon de Pascal dont l'équation polaire est

$$r = A\cos\theta + B.$$

L'élément d'arc de cette courbe est

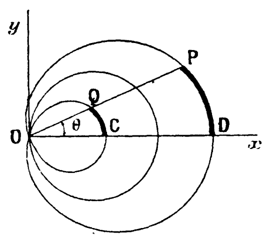
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B})^2 + \mathrm{A}^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + 2\,\mathrm{AB}\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2\,\mathrm{AB}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{(\mathrm{A} + \mathrm{B})^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (\mathrm{A} - \mathrm{B})^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Fig. 2.



Si O est le point double du limaçon (ou pôle), si C et D sont les sommets tels que

$$\mathrm{OC} = \mathrm{A} - \mathrm{B}, \qquad \mathrm{OD} = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

les arcs PD et QC correspondant à l'angle θ ont pour valeurs

$$(2)\quad s_{\mathrm{PD}} = 2\int_0^\theta \sqrt{(\mathrm{A} + \mathrm{B})^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (\mathrm{A} - \mathrm{B})^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$(3)\quad s_{\mathrm{QC}} = 2\int_0^\theta \sqrt{(\mathrm{A} - \mathrm{B})^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (\mathrm{A} + \mathrm{B})^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Pour comparer les formules (2) et (3) à la formule (1), posons

$$\theta = 2\psi = 180^\circ - 2\omega,$$
$$\frac{\theta}{2} = \psi = 90^\circ - \omega.$$

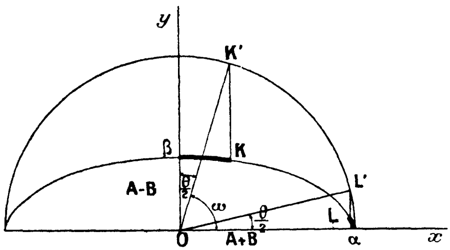
On a alors

$$(4)\ s_{PD} = 2\int_{\omega=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\omega+(A-B)^2\cos^2\omega}\, d\omega,$$

$$(5)\ s_{QC} = 2\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\theta}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\psi+(A-B)^2\cos^2\psi}\, d\psi.$$

Construisons l'ellipse de demi-axes $(A+B)$ et $(A-B)$ et son cercle principal.

Fig. 3.



Soient les demi-axes

$$O\alpha = A+B, \qquad O\beta = A-B.$$

Soient L' et K' des points du cercle principal tels que

$$\widehat{L'O\alpha} = \frac{\theta}{2}, \qquad \widehat{K'O\beta} = \frac{\theta}{2}.$$

Si L et K sont les points de l'ellipse correspondant à L' et K', on a les deux égalités d'arcs

(6) arc PD (limaçon) = 2 arc βK (ellipse),

(7) arc QC (limaçon) = 2 arc Lα (ellipse).

III.

Périmètre du limaçon. — On l'obtient soit par l'arc PD, soit par l'arc QC.

L'arc PD, formule (2), donne pour l'arc total du limaçon

$$
(8)\quad \left\{ \begin{aligned}
S &= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (A-B)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right),\\
S &= 4\int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\omega + (A-B)^2\cos^2\omega}\, d\omega.
\end{aligned} \right.
$$

L'arc QC, formule (3), donne de même

$$
(9)\quad \left\{ \begin{aligned}
S &= 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\frac{\theta}{2} + (A-B)^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\left(\frac{\theta}{2}\right),\\
S &= 4\int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2\sin^2\psi + (A-B)^2\cos^2\psi}\, d\psi.
\end{aligned} \right.
$$

Les formules (8) et (9) démontrent donc le joli résultat suivant :

Le périmètre d'un limaçon de Pascal est équivalent au périmètre de l'ellipse qui a pour demi-axes les distances du point double (ou pôle) à chacun des sommets du limaçon.

Lorsque le limaçon devient une cardioïde, alors $B = A$, l'ellipse devient la *droite aplatie* de longueur $4A$ dont le périmètre est bien $8A$. C'est la longueur connue de la cardioïde dont le cercle de base de la conchoïde a pour diamètre A.

Réciproquement, si l'on pose

$$a = A + B, \qquad b = A - B,$$

on en déduit

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad B = \frac{a-b}{2}.$$

On peut donc dire que :

Le périmètre d'une ellipse donnée est équivalent à celui du limaçon de Pascal dont le cercle générateur, base de la conchoïde, a pour diamètre le $\frac{1}{4}$ *de la somme des axes, et pour constante modulaire le* $\frac{1}{4}$ *de la différence de ces axes.*