Concours d'admission à l'École polytechnique en 1916. Sujets des compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 314-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__314_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1916 [1]. SUJETS DES COMPOSITIONS.

Mathématiques.

Première composition.

I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}) \qquad 2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

Une intégrale étant déterminée par la valeur qu'elle prend pour une valeur particulière de x, dans quel intervalle de variation de x cette intégrale demeure-t-elle définie? Que devient l'intégrale aux limites de cet intervalle?

II. *Faire dans l'équation* (E) *le changement de variables*

$$x = \frac{(1+u)^2}{4u}, \qquad y = \frac{2uv}{1+u^2};$$

déduire du résultat de ce calcul une représentation

---

(1) Il n'y a pas eu de concours en 1915. Celui-ci est ouvert pour l'admission de 70 élèves.

paramétrique des intégrales de l'équation (E). *Cette représentation est-elle valable pour toutes les valeurs réelles de x? La comparer au résultat de l'intégration directe de l'équation* (E).

III. *On propose de satisfaire à l'équation* (E) *par un développement de la forme*

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\psi(x),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux séries entières en x et où $|x|$ désigne la valeur absolue de x. Trouver les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Dans quel intervalle le nouveau mode de représentation des intégrales ainsi obtenu est-il valable? Le comparer au résultat de l'intégration directe.

IV. *Forme de la courbe $y = \varphi(x)$. Forme des diverses courbes intégrales.* (4 heures.)

Deuxième composition.

Un plan vertical est rapporté à deux axes Ox *et* Oy; *l'axe* Ox *est horizontal;* Oy *est vertical et dirigé vers le haut. Dans ce plan se trouve la trajectoire d'un point de masse unité, libre, pesant et subissant de la part de l'air une résistance* R *tangente à la trajectoire. Les unités choisies étant la seconde de temps et le mètre, la trajectoire a pour équation*

$$(1) \qquad y = ax - 8x^2 - x^3 \qquad (a > 0).$$

Le projectile part de l'origine O *sur l'arc* OFM *situé dans l'angle des coordonnées positives; il* *monte au point le plus haut* F *et retombe ensuite sur* Ox *en son point de chute* M.

I. *Calculer, en fonction de* a, *le coefficient angulaire* m *de la trajectoire au point de chute* M *et la flèche* f, *ordonnée du point* F.

II. *Exprimer, en fonction du temps* t, *l'abscisse* x *du mobile et calculer le temps* T *qu'il met à parcourir l'arc* OFM. *Déterminer, en fonction de* x, *la composante* X *suivant* Ox *de la résistance* R.

III. *Évaluer le travail des forces agissant sur le mobile pendant le trajet* OFM. *Trouver la grandeur* V_M *de la vitesse au point de chute.*

IV. *Calculer l'aire balayée par le vecteur vitesse durant le même trajet.*

V. *Divers mobiles identiques partent simultanément de l'origine sur les cubiques qui correspondent aux différentes valeurs de a. Trouver, à un instant ultérieur quelconque, le lieu de leurs positions, l'enveloppe de leurs vitesses et l'enveloppe des normales à leurs trajectoires.*

Nota. — Ce problème se rattache au tir du canon de campagne de 75.

(4 heures.)

Calcul.

L'échelle des abscisses horizontales étant 1^{cm} *pour* 500^{m}; *l'échelle des ordonnées verticales,* 1^{cm} *pour* 0^{m},50, *si l'on prend pour unité le centimètre du dessin, la trajectoire du projectile de* 75^{mm} *est représentée approximativement par la formule*

$$y = ax - 8x^2 - x^3, \tag{1}$$

l'origine O *étant au point de départ du projectile. Au deuxième point* M *d'intersection avec* Ox, *le coefficient angulaire* m *de la tangente à la courbe* (1) *est*

$$(2) \qquad m = 8\sqrt{a+16} - 2a - 32.$$

La durée en secondes du trajet jusqu'au point de chute M *est, dans le même système d'unités, donnée par la formule*

$$(3) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{9\sqrt{\gamma}}\left\{(6\sqrt{a+16} - 8)^{\frac{3}{2}} - 64\right\}.$$

où γ *est l'accélération de la pesanteur dont la grandeur est* 981 C.G.S.

La lettre α *désignant l'angle de la trajectoire vraie avec le plan horizontal au départ, on fait varier* α *par degrés de* 0° *à* 10°. *Calculer, pour chacun des points de chute correspondants* M, *les éléments suivants :*

1° *En mètres, la portée réelle* OM ;

2° *En secondes, la durée* T *du trajet ;*

3° *En degrés, l'angle* μ *que fait la trajectoire réelle avec le plan horizontal en* M.

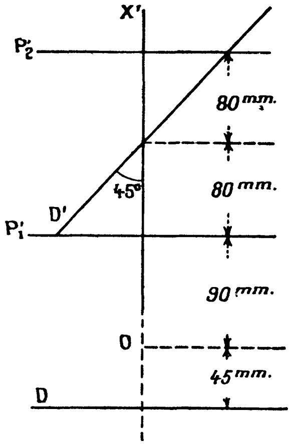
(1 heure.)

Épure de Géométrie descriptive.

Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale (O, X′), *pour génératrice la droite de front* (D, D′). *On considère le solide* S *limité par l'hyperboloïde et les deux plans horizontaux* P'_1 *et* P'_2.

Un cylindre de révolution a pour axe la droite (D, D′) *et pour génératrice celle des génératrices de l'hyperboloïde qui est parallèle à* (D, D′).

On représentera ce qui reste du solide S supposé



opaque, quand on en supprime la partie située à l'intérieur du cylindre.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point O *sera pris sur le grand axe de la feuille, à* 120mm *au-dessus du bord inférieur de celle-ci.* (4 heures.)