Nouvelles annales de mathématiques

Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 320-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__320_1>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

Questions de Laguerre (1).

546 (**1860**, 404). — Étant donnée une conique A, trouver les transformations qui la changent en une conique B, de telle sorte que les normales à la conique A restent, par la transformation, normales à la conique B. Même question pour les surfaces.

772 (**1866**, 384). — Le nombre des sommets (2) d'une courbe algébrique est, en général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i, c, d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques.

848 (**1868**, 137). — Soit une courbe gauche du quatrième

(1) Le lecteur pourra se référer aux *Œuvres de Laguerre*, où il trouvera très probablement des indications utiles pour la solution de la plupart de ces questions. (*Note de la Rédaction.*)

(2) Les sommets sont les points où la courbure est maximum ou minimum.

ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis.

891 (**1868**, 336). — On considère un hyperboloïde à deux nappes et un point de l'hyperbole focale de cette surface; on construit les différents cônes ayant pour sommet ce point et pour bases les sections circulaires de l'hyperboloïde; trouver le lieu formé par les focales de ces cônes.

892 (**1868**, 336). — Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à la conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée ([1]).

893 (**1868**, 336). — Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré.

989 (**1870**, 192). — Une conique passant par quatre points m, n et p, q, soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et désignons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer qu'on a la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{am.bp}}{\sqrt{hm.hp}} + \frac{\sqrt{an.bq}}{\sqrt{hn.hq}} = \mathrm{C}\sqrt{ah.bh},$$

la lettre C désignant une constante.

([1]) Chasles a démontré que les trois coniques doubles dont il s'agit sont sur trois surfaces homofocales (Remarque de Bourget, rédacteur).

1004 (**1870**, 432). — Par deux points fixes on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe; construire géométriquement les points de contact de ab avec son enveloppe.

1058 (**1872**, 95). — On donne une cyclide et une sphère; leur courbe d'intersection est une courbe du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer quatre cônes. Deux des sommets de ces cônes se trouvent respectivement sur chacun des axes de la surface ([1]); lorsque le centre de la sphère est fixe et que son rayon varie, ces deux sommets décrivent les axes; quel est le lieu décrit par les sommets des deux autres cônes?

1092 (**1872**, 478). — On a deux cercles dans un même plan; le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, et le second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m; la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique; construire cette conique.

Trouver la propriété analogue dans l'espace.

1234 (**1877**, 240). — Intégrer l'équation différentielle

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=f(x),$$

$f(x)$ désignant un polynome du troisième degré.

1390 (**1882**, 141). — Considérons l'équation $f(x)=0$ qui a toutes ses racines réelles; k désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation $f(x)+k=0$ ait m racines imaginaires. Démontrer que l'équation

$$f'^2(x)-f(x)f''(x)-kf''(x)=0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

([1]) *Voir* MANNHEIM, *Applications, etc.* (**1869**, 73). Les axes de la cyclide sont les droites fixes par lesquelles passent respectivement les plans des lignes de courbure de chaque système.

1392 (**1882**, 142). — Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^4 x^2 + \ldots + k\omega^{n^2} x^n = 0$$

a également ses racines réelles.

1393 (**1882**, 142). — Soit le polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynome un certain nombre de termes de degré supérieur à n, on puisse obtenir un autre polynome $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles; démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{1.2.3\ldots n} + \frac{a_1 x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{a_2 x^2}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{a_{n-2} x^{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{1} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

1394 (**1882**, 142). — $f(x)$ désignant un polynome quelconque à coefficients réels, on peut toujours déterminer un nombre positif ω, tel que le développement de $e^{\omega x} f(x)$, suivant les puissances croissantes de x, présente précisément autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines positives.

1435 (**1883**, 144). — Quatre semi-droites A, B, C et D sont données; soit a le point où A est touchée par le cycle inscrit dans le triangle ABC, et d le point où D est touchée par le cycle inscrit dans le triangle DBC; démontrer que le point milieu du segment $a\,d$ est sur l'axe radical des cycles inscrits dans les triangles ABD et ACD.