Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 324-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__324_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1582.

(1888, p. 160.)

Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi que, si deux telles coniques se coupent en M, *les tangentes au point* M *font des angles égaux avec un côté du carré.*

R.-W. Genese.

Solution

Par un Abonné.

L'énoncé **1582** n'est pas clair; peut-être même n'est-il-pas exact. Que signifie « semblablement situées »? S'agit-il de coniques semblables et semblablement situées, c'est-à-dire homothétiques; ou bien de coniques simplement semblables. Nous choisirons cette dernière interprétation qui est la plus large.

Que faut-il entendre par cercle directeur? Tantôt on désigne ainsi le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique (Salmon, *Sect. coniq.*, p. 455); tantôt le cercle qui a pour centre un foyer de la courbe et pour rayon le grand axe.

Dans le premier cas les coniques sont concentriques et, étant déjà semblables, elles sont égales; puisque la somme des carrés de leurs axes est constante. Leur enveloppe se compose alors de deux cercles ayant même centre que les coniques données et pour rayons respectivement le grand et le petit axe de ces coniques.

Dans le second cas les coniques ont un foyer commun et sont encore égales. Leur équation générale est, en prenant le foyer comme origine,

$$x^2 + y^2 - e^2(x\cos\varphi + y\sin\varphi - p)^2 = 0,$$

où e et p sont des constantes. φ est donc la seule variable que renferme l'équation précédente et la recherche de l'enveloppe ne présente pas de difficultés. Mais comme résultat on ne trouve pas des droites.

Nous souhaitons qu'un autre abonné soit plus heureux que nous et donne de la question 1582 une interprétation qui permette de retrouver les résultats qui y sont énoncés.

1657.

(1893, p. 53*.)

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents.

Déterminer :

1° *L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues ;*

2° *Le nombre des points de contact de cette surface et de l'axe de ces ellipses.* MANNHEIM.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Sans apporter la solution complète, je pense pouvoir indiquer le moyen d'y parvenir.

Soit ε un ellipsoïde, orienté n'importe comment, ayant son centre O sur le plan P du tableau qui est alors un plan sécant de la surface cherchée Σ.

Le plan P coupe ε suivant une ellipse E ayant pour demi-axes R_1 et R_2.

Menons une tangente quelconque t et les deux tangentes perpendiculaires p', p'', qui la rencontrent en V, W.

t est la trace d'un plan I tangent à ε perpendiculaire au tableau ; p', p'' forment les génératrices de contour apparent du cylindre projetant ε sur I.

La section de Σ par le plan P est donc le lieu des points V, W ou le cercle orthoptique de E. Ce cercle a pour rayon

$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Ainsi, la surface Σ a une infinité de cercles ayant tous leur centre en O, mais les cercles sont de rayon variable, de sorte que Σ ne saurait être une sphère.

D'ailleurs, Σ contient aussi une infinité d'ellipses t dont chacune provient de la projection orthogonale, sur I, de l'ellipse δ contenue dans le plan J conjugué à la direction p' ou p'' (sa trace est le diamètre de l'ellipse E joignant les points de contact des tangentes p', p'').

La surface Σ est tout entière extérieure à l'ellipsoïde ε et a seulement deux points de contact V et W avec chaque ellipse du plan I.

Revenant aux axes principaux de ε, avec $a > b > c$, on voit que Σ a pour sections principales des cercles de rayons

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2+c^2},\quad \sqrt{b^2+c^2},$$

dans les plans des xy, des xz et des yz. Σ est donc une sorte de dilatation de ε. Elle est au moins du quatrième degré, et elle admet pour plans de symétrie ceux de ε.

Pour en former l'équation, la méthode la plus simple et la plus expéditive sera sans doute la suivante, fondée sur la génération par les cercles OVW. On y parviendra en utilisant les formules de Painvin proposées dans la question **824** (1867, p. 432), résolue 1868, p. 91-96 par Maffiotti et p. 280-282 par Housel.

L'ellipsoïde ε ayant pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1 = 0,$$

avec

$$A = \frac{1}{a^2},\qquad A' = \frac{1}{b^2},\qquad A'' = \frac{1}{c^2},$$

le plan P (tout à l'heure plan du tableau) sera représenté par l'équation

$$(1)\qquad \alpha x + \beta y + 1 = 0,$$

et en posant

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = M$$

et

$$R_1^2 R_2^2 = N,$$

d'où

$$(2)\qquad R_1^2 + R_2^2 = MN,$$

M et N ayant les valeurs indiquées (*loc. cit.*, question et réponses **824**), la surface Σ sera le lieu du cercle de section, par le plan (1), de la sphère ayant pour équation

$$(3) \qquad x^2+y^2+z^2-R_1^2-R_2^2=0,$$

et il restera à éliminer α et β entre les équations (1), (2), (3).

M et N se déduisent d'un certain déterminant qui se simplifie beaucoup dans le cas particulier, puisqu'il devient le déterminant troué

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & A' & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & A'' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1680.

(1894, p. 5*.)

On considère un faisceau de coniques passant par quatre points fixes :

1° *Lieu des points de contact des tangentes menées à chacune d'elles par un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère.*

2° *Lieu des points de rencontre des tangentes menées à chacune des coniques du faisceau par deux points pris sur l'une d'entre elles.* André Cazamian.

Solution
Par un Abonné.

1° Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à un faisceau de coniques est une cubique. Cette cubique passe par les points de base du faisceau; pour ces points la tangente à la cubique passe par le point fixe; elle passe aussi par les trois points diagonaux du quadrangle des quatre points, pour lesquels la tangente passe par le point de concours des polaires du point fixe par rapport aux coniques du faisceau. Enfin elle passe au point fixe. C'est le mode de génération classique des cubiques, dû à Maclaurin. Si le point fixe est sur l'un des côtés du quadrangle, elle se décompose en ce côté et une conique.

2° Faisons une transformation homographique telle que les deux points d'où partent les tangentes deviennent les points cycliques. Le problème sera ramené à trouver le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle. Ce lieu se compose de deux cubiques (*Nouv. Ann.*, 1889, p. 98). Lorsque les deux points ne sont pas sur une conique du faisceau, le lieu est une sextique.

(*Voir* KŒHLER, *Ex. de Géom. analyt. et de Géom. supér.*, t. I, p. 329.)

1704*bis*.

(1915, p. 288.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, le centre du cercle circonscrit décrit une conique. Examiner, en particulier, le cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. M. WEILL.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

La solution de cette question se tire aisément d'un principe que j'ai établi depuis fort longtemps, relatif aux polygones de Poncelet, auxquels j'ai consacré de nombreuses Notes.

Si l'on exprime les coordonnées d'un point d'une conique en fonction rationnelle d'un paramètre t, l'équation, de degré m par rapport à t, qui définit m sommets d'un polygone inscrit dans la conique, renferme, lorsque le polygone se déplace en restant circonscrit à une autre conique, un paramètre arbitraire λ; or, j'ai établi que ce paramètre λ entre *linéairement* dans les coefficients de l'équation.

D'après cela, considérons une ellipse; les coordonnées d'un de ses points sont données par les formules

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\frac{2t}{1+t^2}.$$

L'équation

$$t^3 + \lambda t^2 + (x\lambda + \beta)t + \gamma\lambda + \delta = 0,$$

où λ est un paramètre variable, α, β, γ, δ, des constantes, définit un triangle inscrit dans l'ellipse et circonscrit à une autre conique; appelons t', t'', t''' les racines de l'équation; les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle sont données par les formules, faciles à établir,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \frac{(1 - t't'')(1 - t't''')(1 - t''t''')}{(1 + t'^2)(1 + t''^2)(1 + t'''^2)},$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b} \frac{(t' + t'' + t''')\Sigma t't'' - t't''t'''}{(1 + t'^2)(1 + t''^2)(1 + t'''^2)};$$

les valeurs de x et y renferment, au numérateur et au dénominateur, des polynomes du second degré en λ : le théorème est donc démontré. — J'ai démontré, de même, il y a fort longtemps, que le point de concours des médianes d'un triangle qui se déplace en restant inscrit dans une conique C et circonscrit à une conique C', décrit une conique homothétique de C ; théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un autre, très général, relatif à des courbes de degré m dont l'équation renferme un paramètre du degré p, théorème que j'ai établi dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

1756.

(1897, p. 100.)

Diviser un cercle, de rayon donné, en trois parties équivalentes et inégales formées par des arcs de cercle.

EMINE.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Le problème est manifestement indéterminé, car il y a une infinité d'arcs de cercles de centres quelconques et de rayons convenables, détachant d'un cercle donné le tiers de sa surface. Il faudra ensuite diviser le restant en deux parties équivalentes, ce qui se fera aussi par une autre infinité d'arcs de cercles de centres quelconques et de rayons convenables.

Rien n'ayant été spécifié, l'énoncé est demeuré sans réponse.

Le choix des arcs à employer étant laissé au lecteur, je proposerai les variétés suivantes :

1° Deux arcs ayant même centre en un point A de la circonférence donnée ;

2° Deux cercles concentriques avec la circonférence donnée ;

3° Deux circonférences tangentes intérieurement en un même point de la circonférence donnée ;

4° Etc., etc.

Mais s'il est facile d'improviser des variantes, autre chose est de pouvoir affirmer qu'il soit possible de les résoudre ou même de les mettre en équation. Il me paraît donc inutile de poursuivre cette investigation, à moins de nouvelle indication précisant la question 1756.

1796.

(1898, p. 196.)

Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, la somme des cosinus des angles reste constante. M. WEILL.

NOTE

Par L'AUTEUR.

La solution de cette question se trouve dans mon Mémoire sur les polygones inscrits à un cercle et circonscrits à un autre cercle (*Journal de Liouville*, 1878, p. 265-304).

1834.

(1900, p. 95, et 1915, p. 474.)

Étant données deux coniques S *et* S', *trouver le lieu d'un point* P *tel qu'on puisse mener de ce point une tangente à* S *et une tangente à* S' *perpendiculaires entre elles.*

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 *du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les foyers réels et imaginaires des deux coniques* S *et* S' *et les points multiples de* C_8 *sont sur une même courbe* C_3 *du troisième ordre qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite de l'infini lorsque les deux coniques* S *et* S' *sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe* C_3. *Le lieu cherché* C_8 *est tangent en huit points à chacune des coniques données ; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.*

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. Franel.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soient

$$au^2 + 2buv + cv^2 + duw + 2evw + fw^2 = S = 0,$$
$$a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + d'uw + 2e'vw + f'w^2 = S' = 0$$

les deux coniques données; les équations aux coefficients angulaires des tangentes à ces coniques issues d'un point P seront de la forme

$$Am^2 + 2Bm + C = 0,$$
$$A'm^2 + 2B'm + C' = 0;$$

exprimer que le point P est un point du lieu cherché revient à écrire que les deux équations

$$Am^2 + 2Bm + C = 0,$$
$$C'm^2 - 2B'm + A' = 0$$

ont une racine commune, ce qui donne

$$(1) \qquad (AA' - CC')^2 + 4(BC' + AB')(CB' + A'B) = 0,$$

or

$$A = fx^2 - 2dx + a, \quad B = -(fxy - ex - dy + b), \quad C = fy^2 - 2ey + c,$$
$$A' = f'x^2 - 2d'x + a', \quad B' = -(f'xy - e'x - d'y + b'), \quad C' = f'y^2 - 2e'y + c'.$$

On vérifie aisément que les termes de plus haut degré sont $f^2 f'^2 (x' + y')^4$; il est d'ailleurs évident que les seuls points à l'infini du lieu sont les points cycliques.

Les trois courbes du quatrième ordre

$$AA' - CC' = 0,$$
$$BC' + AB' = 0,$$
$$BA' + CB' = 0$$

ont huit points communs à distance finie et la forme de l'équation (1) montre que ce sont des points doubles de la courbe C_8, qui, ayant deux points quadruples et huit points doubles est de genre *un*.

Les foyers de S et S' sont déterminés par les équations

$$A - C = 0, \qquad A' - C' = 0,$$
$$B = 0, \qquad B' = 0;$$

ils sont sur la cubique circulaire

$$B'(A - C) - B(A' - C') = (BC' + AB') - (BA' + CB') = 0,$$

cubique circulaire qui est visiblement le lieu des foyers des coniques du faisceau $S + \lambda S' = 0$. On sait que cette cubique se décompose en une hyperbole équilatère et en la droite de l'infini, lorsque S et S' sont concentriques.

Soit P_1 le point d'incidence sur S d'une tangente commune à S' et à la développée de S ; P_1 est un point du lieu C_8, et comme le centre instantané de rotation de l'angle mobile P coïncide pour la position P_1 avec le contact de S' avec la normale à S en P_1, S et C_8 sont tangentes en P_1 et aux sept autres points analogues.

L'équation du lieu peut d'ailleurs s'écrire

$$(AA' - CC')^2 + 4[B^2A'C' + BB'(AA' + CC') + B'^2AC] = 0;$$

sous cette forme on voit que les deux coniques S et S' qui ont pour équations

$$B^2 - AC = 0, \qquad B'^2 - A'C' = 0$$

sont tangentes à la courbe C_8 et que les seize points de contact sont sur la quartique

$$AA' + CC' + 2BB' = 0,$$

qui est le lieu des points tels que les deux tangentes à S menées par l'un d'eux forment un faisceau harmonique avec les perpendiculaires aux tangentes menées à S' par ce même point.

Pour exprimer les coordonnées d'un point de C_8 en fonction d'un paramètre, il nous faudra, suivant la méthode générale, déterminer l'équation des courbes C_6 du sixième ordre passant par les points doubles de C_8, admettant les points cycliques comme points triples et passant par cinq points donnés de C_8.

L'équation

$$C_6 = f_1(AA' - CC') + f_2(BC' + AB') + f_3(BA' + CB') = 0,$$

où f_1, f_2, f_3 représentent les premiers membres des équations générales de trois coniques, renfermant dix-sept paramètres, est l'équation générale des sextiques circulaires passant par les points doubles de C_8.

En supposant que S et S' soient respectivement tangentes à Oy et Ox, ce qui nous donnera les conditions

$$a = c' = 0,$$

nous mettrons en évidence quatre points de C_8, les points d'intersections des quatre droites

$$A = x(fx - 2d) = 0, \qquad C' = y(f'y - 2e') = 0;$$

en écrivant que C_6 passe par ces quatre points, est tangente à l'origine à C_8 et admet les points cycliques comme points triples, son équation deviendra de la forme

$$\lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y) + \lambda_3 \varphi_3(x, y) = 0,$$

et le problème s'achèvera suivant la méthode classique. Ce calcul ne semblant présenter aucun intérêt particulier, nous ne le ferons pas.

Si l'une des coniques données devient une parabole, S par exemple, nous aurons $f = 0$ et le degré de C_8 s'abaissera de deux unités.

Les termes de plus haut degré seront

$$4f'^2(x^2 + y^2)^2 (ex + dy)^2,$$

la courbe sera dans ce cas une sextique bicirculaire admettant la direction de l'axe de la parabole S comme direction asymptotique double, la courbe étant en ce point tangente à la droite de l'infini, et le nombre des points doubles à distance finie s'abaisse à sept.

Enfin si S et S' sont toutes deux des paraboles, le lieu est une quartique circulaire admettant les axes de ces deux courbes comme directions asymptotiques. Si l'une S par exemple se réduit à deux points, A et B, le lieu est évidemment l'ensemble des deux podaires de S′ par rapport à chacun de ces points.

Autres solutions. par M. M.-F. EGAN et M. PICARDAT.

1842.

(1900, p. 190.)

Sur la diagonale extérieure d'un quadrilatère inscrit, les intersections de cette diagonale avec les diagonales intérieures, les intersections des côtés opposés, les points où passent les perpendiculaires menées aux diagonales intérieures par l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les extrémités de la diagonale extérieure et le croisement des diagonales intérieures, sont six points en involution. C. BLANC.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Soient A, B, C, D les sommets du quadrilatère ; E et F les points de concours des côtés opposés ; M, N, P les sommets du triangle diagonal du quadrilatère ; H l'orthocentre du triangle MEF.

Les deux hauteurs HE et HF et les perpendiculaires abaissées de H sur AC, BD forment un faisceau harmonique, car elles sont perpendiculaires aux rayons du faisceau (M.ENFP) qui est harmonique. Donc les deux perpendiculaires coupent EF en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points E et F. Comme il en est de même pour les points N et P, les six points considérés sont bien en involution. Le théorème est vrai pour un quadrilatère quelconque.

1872 (1).

(1900, p. 482.)

Par l'inversion quadrique définie avec le pôle O et le cercle-point V (conique des points unis), un cercle ayant le centre V et qui ne passe pas par O est transformé en une quartique rationnelle circulaire à point tacnodal, qui est ligne d'ombre d'un hélicoïde gauche. Construire les intersections de la courbe avec une droite ; les tangentes

(1) Numérotée 1860 par erreur.

au point double (qui est aussi un foyer quadruple de la courbe), la tangente en un point quelconque et les deux tangentes doubles. V. RETALI.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Le cercle-point V se confond avec les deux droites isotropes issues de ce point et par suite la courbe à étudier est définie géométriquement de la façon suivante : « On donne un cercle de centre V et de rayon A et un point O de son plan ; par O on mène une sécante qui rencontre le cercle en P ; le point P', situé sur cette sécante, et tel que l'angle PVP' soit droit, décrit la courbe en question. » Dans ce mode de génération on reconnaît la courbe appelée « capricorne ». (*Voir* GOMÈS TEIXEIRA, *Courbes spéciales remarquables*, t. II, p. 319-320, 386-388 ; PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I, p. 450.)

Elle a un point tacnodal au centre du cercle V et un point double en O. Elle affecte des formes différentes suivant que le point O est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle V. Elle dégénère en une strophoïde quand il est sur le cercle et en un cappa quand il est à l'infini. (*Voir* PONCELET, *loc. cit.*)

Prenons comme axe des x la droite VO et comme axe des y la perpendiculaire Vy. Désignons par h la longueur VO et soient x, y les coordonnées du point P ; X, Y celles de P'.

Les équations des droites OP et VP' étant

$$\text{(1)} \qquad Xy + Y(h-x) - hy = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad Xx + Yy = 0,$$

on en déduit

$$\text{(3)} \qquad X = \frac{hy^2}{x^2+y^2-hx}, \qquad Y = \frac{-hxy}{x^2+y^2-hx};$$

et, puisque les relations (1) et (2) sont symétriques en x, y, X, Y, on a aussi

$$\text{(4)} \qquad x = \frac{hY^2}{X^2+Y^2-hX}, \qquad y = \frac{-hXY}{X^2+Y^2-hX}.$$

Par suite au cercle V

$$x^2+y^2-a^2=0$$

correspond la courbe

$$(5)\qquad h^2 Y^2(X^2+Y^2) - a^2(X^2+Y^2-hX)^2 = 0.$$

On trouve dans Poncelet une construction de la tangente basée sur la méthode de Roberval. En voici une différente obtenue au moyen du théorème de Frégier, appliqué à l'angle droit PVP', en observant que O est le point de Frégier correspondant.

La normale en V à l'axe Vx, la tangente en P au cercle V et la tangente cherchée en P' à (5) coupent les côtés opposés du triangle PVP' en trois points situés sur une droite ; ce qui suffit à déterminer la tangente en P'.

Les tangentes au point double O sont les droites qui joignent ce point aux intersections du cercle V avec Oy.

Pour trouver les tangentes doubles de (5), appliquons les formules de transformation (3) à la droite

$$(6)\qquad uX + vY - 1 = 0$$

et à la courbe (5). Nous obtenons ainsi la conique qui a pour équation

$$(7)\qquad hy(uy - vx) - (x^2+y^2-hx) = 0,$$

et le cercle V. Si la droite (6) et la courbe (5) sont bitangentes, il en est de même du cercle V et de la conique (7) et réciproquement. Or la conique (7) est déterminée. Elle passe en effet par les points V et O ; au point V elle a Vy pour tangente ; au point O elle a pour tangente la droite qui joint ce point au point de rencontre de Vy avec (6). Enfin elle passe par le point d'intersection du cercle décrit sur VO comme diamètre avec la perpendiculaire abaissée de V sur (6).

Le problème de la détermination des tangentes doubles de la courbe (5) et de ses points d'intersection avec une droite de son plan se présente donc comme très analogue à celui qui a été résolu dans la question 1871 et il paraît inutile d'insister davantage.