Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 355-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__355_1>

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — *Sur un article de M. Bouvaist*. — M. Bouvaist a obtenu très élégamment (p. 184) le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles T qui sont circonscrits à une conique S, conjugués à une conique Σ, inscrits par suite à une conique S'; ce lieu dépend uniquement de la conique S et du cercle orthoptique de la conique Σ. Voici quelques remarques concernant les cas où le lieu est un système de deux droites :

1° Quand le lieu se réduit à un point (deux droites imaginaires), l'une des coniques Σ en nombre infini qui correspondent à l'un ou à l'autre des deux cercles orthoptiques obtenus donne un cercle comme conique S'. Il existe une infinité de triangles inscrits à ce cercle et conjugués à la conique Σ.

2° Lorsque la conique S est une parabole, l'un des triangles T a pour l'un de ses côtés la droite à l'infini du plan, et le lieu comprend la droite à l'infini. Le lieu véritable est alors une droite *réelle*. Pour obtenir ce cas dans le calcul de M. Bouvaist, on transporte l'origine au point de coordonnées $-a$, o, on fait $\frac{b^2}{a} = p$, puis a infini, et l'on trouve

$$0x^2 + 0xy + 0y^2 + Ax + By + C = 0.$$

La conique S' passe alors au centre de la conique Σ, et ses directions asymptotiques sont conjuguées par rapport à Σ.

3° Lorsque la conique Σ est une parabole, la question est illusoire, le centre d'un cercle conjugué à une parabole étant sur la directrice. En posant alors

$$2px_0 = 2qy_0 = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = G.$$

on doit faire G infini, x_0, y_0 et ρ infinis, la puissance de l'origine par rapport au cercle orthoptique de Σ, soit $x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$, étant un infiniment grand du même ordre que x_0 et y_0; le lieu est la droite double

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire la directrice comptée deux fois.

J'ai été amené à penser aux deux derniers cas en partant de la conique S' représentée paramétriquement et en regardant les valeurs du paramètre aux sommets d'un triangle T comme données par l'équation

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = 0,$$

où f et φ sont des polynomes du troisième degré; on écrit

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = \lambda f(t') + \varphi(t'), \ldots.$$

Le lieu, représenté paramétriquement, peut ainsi se réduire à une droite, et l'on obtient les deux cas signalés ici.

M. **L. Godeaux**. — *Remarque sur un précédent article.* — Inséré dans le numéro de février 1916 (p. 49-61), il a pour titre : « Étude élémentaire sur l'homographie plane de période 3 et sur une surface cubique. »

Au paragraphe 9 (p. 61), nous écrivons :

« ... une surface cubique, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, ne peut pas nécessairement être représentée par l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

c'est-à-dire que les trois couples de plans tangents à la surface aux trois points biplanaires ne sont pas nécessairement les faces d'un trièdre; .... »

Il s'agit évidemment d'un *trièdre donné*, car on sait que les trois couples de plans tangents dont il vient d'être question sont toujours les faces d'un trièdre. Telle que nous l'avions écrite, notre phrase pouvait prêter à confusion.

M. **Henri Lebesgue**. — *A propos d'un article de M. Barisien* (mai 1916). — Soient (f) une roulette fixe, (m) une roulette mobile, P un point entraîné par (m). Quand le centre instantané I se déplace de ds, (m) tourne de $\frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}$, R et r étant les rayons de courbure en I des deux roulettes ; rayons qu'on affectera du même signe ou non, suivant que les courbures sont d'orientations différentes ou de même orientation. Donc le déplacement de P est

$$d\sigma = \mathrm{IP}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ds.$$

Si (m) et (f) sont des circonférences, en prenant pour variable l'angle θ des rayons de I et de P dans (m), et en posant $m\mathrm{P} = l$ (on prendra l du signe de r), on a

$$d\sigma = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta}\left(1 + \frac{r}{R}\right) d\theta.$$

C'est la différentielle elliptique de seconde espèce qui sert à évaluer un arc d'ellipse, d'où la possibilité de définir un arc d'ellipse ayant même longueur qu'un arc donné d'une courbe épicycloïdale générale.

Je précise : faisons correspondre les points de deux courbes épicycloïdales quand ils sont donnés par une même valeur de θ. Cette correspondance conservera les longueurs des arcs, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{r}{l} = \frac{r'}{l'}, \qquad r\left(1 + \frac{r}{R}\right) = r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right);$$

dans ces relations, les éléments accentués sont relatifs à la seconde courbe épicycloïdale. Or, si les éléments non accentués sont donnés, on peut calculer les éléments accentués en ajoutant même la condition

$$R' = -2r',$$

auquel cas la seconde courbe est une ellipse.

Les conditions (1) ne sont pas les seules qui assurent la conservation des longueurs. Cette conservation a aussi lieu avec

$$(2) \qquad \frac{r}{l} = \frac{l'}{r'}, \qquad l\left(1 + \frac{r}{R}\right) = r'\left(1 + \frac{r'}{R'}\right).$$

Mais les conditions (1) et (2) sont en réalité identiques; il suffit, pour passer d'une forme des conditions à l'autre, de changer pour l'une des courbes de mode de génération épicycloïdale. On sait, en effet, que chaque courbe épicycloïdale admet une double génération et, entre les éléments r, l, R, r_1, l_1, R_1 relatifs à ces deux générations, on a

$$\frac{r}{l} = \frac{l_1}{r_1} = \frac{R}{R_1}.$$

On pourrait encore déduire les conditions (2) des conditions (1) en utilisant la remarque suivante : soit P′ le point conjugué de P, par rapport à (m); son déplacement

$$d\sigma' = IP'\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) ds$$

est proportionnel à $d\sigma$, que (f) soit ou non une circonférence, car le rapport $\frac{IP'}{IP}$ est constant.