Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 395-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__395_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1364.

(1881, p. 380 et 528.)

1° *Les équations réciproques telles que, en posant* $x = 2t$, *leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme*

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4] = 0,$$

F *désignant une fonction entière et homogène de* $(x+1)^4$ *et* $(x-1)^4$.

On suppose que l'équation proposée n'admet pas pour racine $+1$ *ou* -1.

2° *Les équations réciproques telles que, en posant*

$$x + \frac{1}{x} = t,$$

leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n (x^2-x+1)^{n'} \times F[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F *désignant une fonction entière et homogène des quantités* $(x^2+x+1)^2$, $(x^2-x+1)^2$. PELLET.

Solution
Par l'Auteur.

Cette question, insérée au Tome XX de la 2e série, p. 380, a été rectifiée dans son énoncé, page 528, même Tome.

$F(x) = 0$ étant une équation réciproque, n'ayant pas de racine égale à $+1$ ou à -1, si l'on effectue la transformation $x = \dfrac{d+y}{d-y}$, l'équation en y est paire, puisque le changement de y en $-y$, transforme x en $\dfrac{1}{x}$. Cette remarque donne immédiatement la solution de la question.

Si en posant $x + \dfrac{1}{x} = 2t$, l'équation en t est réciproque, la transformée par la substitution $t = \dfrac{1+y}{1-y}$ est paire, $F_1(y^2) = 0$; remplaçant y par sa valeur

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1+2x} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2},$$

et multipliant par une puissance convenable de $(x+1)^2$, on voit que $F(x)$ doit être une fonction homogène de $(x+1)^4$ et $(x-1)^4$.

Si, en posant $x + \dfrac{1}{x} = t$, l'équation en t est réciproque, alors

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{x^2+1-x}{x^2+1+x},$$

et l'équation $F(x) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n (x^2-x+1)^{n'} \times F_1[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F_1 désignant une fonction entière et homogène de

$$(x^2+x+1)^2 \quad \text{et} \quad (x^2-x+1)^2.$$

1871 (1).

(1900, p. 432.)

Étant donnés, dans un plan, un cercle C^2 *ayant le centre* O *et un cercle-point non situé sur* C^2, *prenons sur le rayon qui unit* O *avec le point variable* P *de* C^2, *le conjugué harmonique de* P *par rapport au cercle-point ; le lieu de* P′ *est une courbe de Jérabek ; construire la tangente au point* P′, *les tangentes au point double, les tangentes doubles, l'intersection de la courbe avec une droite.*

V. Retali.

SOLUTION

Par un Abonné (2).

Soit A le cercle-point ; c'est-à-dire l'ensemble des deux droites isotropes issues de A. Les droites AP et AP′ étant conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes sont rectangulaires ; donc le lieu de P′ est défini de la façon suivante : soient P un point d'une circonférence C^2 de centre O ; A un point fixe de son plan ; AP′ une perpendiculaire à la droite AP et P′ le point d'intersection de AP′ et OP ; trouver le lieu de P′. Ce lieu est une courbe de Jérabek (*voir* Gomès Teixeira, *Courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 317).

Prenons deux axes rectangulaires ayant pour origine le point O ; l'axe des x passant en A. Désignons OA par h et soient x, y les coordonnées de P ; X, Y celles de P′. Les équations des droites OP et AP′ sont :

$$(1)\qquad Xy - Yx = 0,$$

$$(2)\qquad X(h-x) - Yy - h(h-x) = 0.$$

(1) Numérotée 1859 par erreur.

(2) Les solutions aux questions 1871, 1872 nous avaient été adressées simultanément. Les nécessités de la mise en pages ont conduit à publier d'abord 1872 (p. 335-336). L'auteur renvoie, vers la fin, à la solution 1871, qu'il supposait devoir être publiée précédemment. Il nous suffit d'attirer sur ce point l'attention du lecteur.

La Rédaction.

On en déduit

$$(3)\qquad X = \frac{hx(x-h)}{x^2+y^2-hx}, \qquad Y = \frac{hy(x-h)}{x^2+y^2-hx}.$$

Les équations (1) et (2) étant symétriques en x, X, y, Y, on a de même

$$(4)\qquad x = \frac{hX(X-h)}{X^2+Y^2-hX}, \qquad y = \frac{hY(X-h)}{X^2+Y^2-hX}.$$

Telles sont les formules qui lient les coordonnées des points correspondants P et P'. Si le point P décrit le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

le point P' décrit la courbe

$$(5)\qquad h^2(X^2+Y^2)(X-h)^2-a^2(X^2+Y^2-hX)^2=0.$$

Pour construire la tangente au point P' à cette courbe, il suffit d'appliquer le théorème de Frégier à l'angle droit PAP', mobile autour de son sommet A ; en observant que le point de Frégier est le centre O du cercle C^2. On voit ainsi que la normale en A à l'axe Ox, la tangente en P au cercle C^2 et la tangente en P' à (5) coupent les côtés opposés du triangle PAP' en trois points en ligne droite ; ce qui suffit à déterminer cette dernière tangente.

Le point O est un point double de la courbe et les tangentes en ce point ont pour équation

$$(a^2-h^2)X^2-h^2Y^2=0.$$

Ce sont les droites qui joignent le centre O aux points d'intersection du cercle C^2 et de la normale en A à Ox. Ces droites sont donc réelles quand cette normale coupe le cercle C^2 ; c'est-à-dire quand le point A est intérieur au cercle. Dans ce cas le point double O est réel ; dans le cas contraire il est isolé.

Pour trouver les tangentes doubles de (5), prenons une droite quelconque

$$(6)\qquad uX+vY-1=0,$$

et appliquons-lui les formules (3). Elle se transforme en une conique qui a pour équation

$$(7) \qquad h(x-h)(ux+vy)-(x^2+y^2-hx)=0;$$

tandis que (5) elle-même se transforme dans le cercle C^2. Si la droite est bitangente à la courbe, la conique est bitangente à C^2. Comme elle passe à l'origine ainsi qu'au point A où elle est normale à Ox, on est ramené au problème suivant : « Construire une conique qui ait un double contact avec un cercle donné, qui passe par le centre O de ce cercle et par le point A, situé sur Ox, et admettant Ox comme normale en ce point. » Voici comment il peut être résolu.

L'équation d'une conique ayant un double contact avec la circonférence

$$x^2+y^2-a^2=0,$$

et passant par le centre de cette courbe, est

$$x^2+y^2-a^2+(\alpha x+\beta y-a)^2=0.$$

Faisons-y $x=h$ et exprimons que l'équation en y a deux racines nulles, nous obtenons

$$\beta(\alpha h-a)=0, \qquad h^2(1+\alpha^2)-2a\alpha h=0.$$

La condition $\alpha h-a=0$ conduit à $h=\pm a$ et doit être rejetée. Il reste donc les conditions

$$\beta=0, \qquad \alpha=\frac{a\pm\sqrt{a^2-h^2}}{h}.$$

On voit ainsi que la corde de contact est parallèle à Oy et passe par le point d'abscisse

$$x=\frac{ah}{a\pm\sqrt{a^2-h^2}};$$

ce qui suffit à la déterminer.

La courbe (5) étant du quatrième degré, la construction des points où elle rencontre une droite arbitraire de son plan est impossible avec la règle et le compas. On peut ramener cette construction à celle des points communs à une conique et au cercle C^2 ; mais il faut bien remarquer que c'est remplacer un problème insoluble par un autre qui ne l'est pas moins. Toutefois, comme c'est probablement la solution envisagée par l'auteur de la question, nous allons l'exposer rapidement.

La droite (6) se transforme par les formules (3) en la conique (7). Celle-ci passe en A où elle est normale à Ox; à l'origine où elle a pour tangente la droite

$$(1 - hu)x - hvy = 0;$$

c'est-à-dire la droite qui va de l'origine au point de rencontre de la droite donnée avec la normale en A à Ox. Enfin la conique passe par le point d'intersection du cercle décrit sur OA comme diamètre avec la parallèle à la droite donnée, menée par l'origine. Elle est donc déterminée et ses points d'intersection avec C^2 correspondent aux points de rencontre de la droite avec (5); c'est-à-dire aux points cherchés.